Додаток
до листа Інституту
інноваційних технологій і
змісту освіти
27.05.2014 №14.1/10-1648

Завдання для відбіркових етапів
[1] XVII Всеукраїнського турніру Юних математиків
імені професора М.Й. Ядренка

Деякі із задач, що пропонуються нижче, досить складні і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У певних ситуаціях вашій команді буде варто поставити і розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної «боротьби», оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій.

Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру (нехтування ж можливостями узагальнення інколи призводить до втрати балів).

1.«Кути в трикутнику»

У трикутнику *ABC,* один з кутів якого дорівнює 48°, довжини сторін задовольняють співвідношення $(a-c)(a+c)^2+bc(a+c)=ab^2$. Виразіть у градусах величини двох інших кутів цього трикутника.

2. «Дивна тотожність»

Орися записала в зошиті подвійну тотожність, після чого зачитала її вголос:

Ікс плюс ікс на ікс плюс ікс на ікс плюс ікс на ікс плюс ікс дорівнює ікс плюс ікс на ікс плюс ікс на ікс плюс ікс дорівнює ікс плюс ікс на ікс плюс ікс.

Наведіть приклад тотожності, яку могла записати Орися, або доведіть, що дівчина помилилася.

3. «Тригонометричні добутки»

Обчислити добутки:

а) $\left(1-\dfrac{\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\right)\left(1-\dfrac{\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ}\right)\ldots\left(1-\dfrac{\cos 119^\circ}{\cos 59^\circ}\right)$;

б) $(1-\operatorname{ctg} 1^\circ)(1-\operatorname{ctg} 2^\circ)\ldots(1-\operatorname{ctg} 44^\circ)$;

[1]Для проведення міжшкільних, районних, міських та обласних етапів турніру відповідні журі й оргкомітети можуть частково змінювати запропонований перелік задач.

в) $\left(\sqrt{3}+\operatorname{tg}1^\circ\right)\left(\sqrt{3}+\operatorname{tg}2^\circ\right)\ldots\left(\sqrt{3}+\operatorname{tg}29^\circ\right)$.

4. «Алгебраїчні суми»

Обчислити знакозмінні суми біноміальних коефіцієнтів:

а) $C_{2013}^{0}-C_{2012}^{1}+C_{2011}^{2}-C_{2010}^{3}+\ldots-C_{1008}^{1005}+C_{1007}^{1006}$;

б) $C_{2014}^{0}-C_{2013}^{1}+C_{2012}^{2}-C_{2011}^{3}+\ldots+C_{1008}^{1006}-C_{1007}^{1007}$;

в) $C_{2015}^{0}-C_{2014}^{1}+C_{2013}^{2}-C_{2012}^{3}+\ldots+C_{1009}^{1006}-C_{1008}^{1007}$.

5. «Періодичні послідовності»

Розглядається послідовність цілих чисел $\{a_n, n\geq 1\}$.

5.1. Нехай виконується умова

$$a_{n+1}=\min\left(a_n,0\right)-a_{n-1}$$

для всіх $n\geq 2$. Довести, що ця послідовність періодична.

5.2. Нехай виконуються умови

$$a_{2n+1}=\min\left(2a_{2n},0\right)-a_{2n-1} \text{ та } a_{2n+2}=\min\left(a_{2n+1},0\right)-a_{2n}$$

для всіх $n\geq 1$. Довести періодичність цієї послідовності.

5.3. Нехай виконуються умови

$$a_{2n+1}=\min\left(3a_{2n},0\right)-a_{2n-1} \text{ та } a_{2n+2}=\min\left(a_{2n+1},0\right)-a_{2n}$$

для всіх $n\geq 1$. Довести, що ця послідовність періодична.

6. «Суми коренів»

Задані два натуральних числа k та m. Нехай a_1, a_2, …, a_k та b_1, b_2, …, b_m – такі додатні дійсні числа, що

$$\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[n]{b_1}+\sqrt[n]{b_2}+\ldots+\sqrt[n]{b_m}$$

для всіх натуральних $n\geq 2$.

6.1. Довести, що $k=m$.

6.2. Довести, що $a_1a_2\ldots a_k=b_1b_2\ldots b_m$.

6.3. Якщо кожен із двох заданих наборів чисел впорядкувати за зростанням, то після цього ці набори стануть однаковими. Довести.

7. «Формула Гюйгенса»

Нехай AB – дуга кола, причому невідомими є радіанна міра цієї дуги, а також радіус кола. Для наближеного обчислення довжини цієї дуги застосовують такий спосіб. Відмічають на дузі її середину M і вимірюють хорди AB та AM. Наближене значення довжини p дуги AB обчислюється за формулою Гюйгенса $p \approx q = 2l + \frac{1}{3}(2l - L),$ де $l = AM, L = AB.$ Оцініть відносну похибку $\delta = \frac{|q - p|}{p}$ в залежності від радіанної міри дуги $AB.$

8. «Рівні кути»

У трикутнику ABC на промені BA відмітили точку K так, що $\angle BCA = \angle KCA$, а на медіані BM відмітили точку T так, що $\angle CTK = 90°$. Довести, що $\angle MTC = \angle MCB$.

9. «Будуємо точку»

Побудувати в трикутнику ABC таку точку $Q,$ що принаймні два з відрізків AQ, BQ, CQ діляться вписаним колом навпіл. Для яких трикутників це можливо?

10. «Зображення чисел Ферма»

Числа $F_n = 2^{2^n} + 1,\ n \geq 0,$ називаються числами Ферма. При $n \geq 3$ подайте кожне з них у вигляді суми квадратів трьох різних натуральних чисел.

11. «Викладаємо квадрати»

У Миколки є набір із 2014 фігурок: 1007 кутиків та 1007 зигзагів (див. рис. 1). Яку найбільшу кількість квадратів, кожен з яких складається з непарної кількості клітинок, зможе викласти Миколка, якщо кутики та зигзаги дозволяється довільним чином повертати чи перевертати? Вже викладені квадрати він не розбирає. Жодні два з викладених квадратів не мають спільних клітинок і не дотикаються.

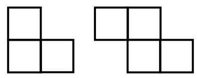

Рис. 1

12. «Різниця обернених квадратів»

Задане додатне число a є різницею обернених квадратів, тобто $a = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}$, де $n, m -$ деякі натуральні числа. Чи може так трапитись, що число $2a$ також є різницею обернених квадратів?

13. «Намисто»

По колу розміщено n кульок, занумерованих у довільному порядку, $n \geq 3.$ Вони обходяться за годинниковою стрілкою. Кульки, для яких номер на попередній кульці менший за номер на наступній кульці, пофарбовані в білий колір, а інші – в чорний. Два розфарбування, які можна сумістити поворотом, вважаються однаковими. Скільки може трапитись різних розфарбувань?

14. «Умовний мінімум»

Знайти найменше можливе значення суми $x+y+z,$ де x,y,z – невід'ємні числа, що задовольняють умову $(x-y)(y-z)(z-x)\geq 1.$

15. «Два многочлени»

Нехай $P(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+...+a_0$ та $Q(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+...+b_0$ – два многочлени, причому їхні коефіцієнти дорівнюють 1 або 2014. Відомо, що $Q(x)$ ділиться на $P(x)$. Доведіть, що $m+1$ є дільником числа $n+1$.

16. «Суперпозиція многочленів»

Дано функції $f(x)=x^2+1$ та $g(x)=x^3-1$.

16.1. Чи можна функцію $h(x)=\left(x^2+2\right)^{6^{2014}}$ подати у вигляді суперпозиції деякої кількості функцій f та g? (Тобто чи існує розклад $h(x)=h_1(h_2(...h_n(x)...))$, де кожна h_k – це f або g?)

16.2. Довести, що при всіх натуральних k многочлен $h(x)=\left(x^4-6x^2+1\right)^k$ не можна подати у вигляді суперпозиції деякої кількості функцій f та g.

16.3 Описати якомога ширші класи многочленів, які можна подати, та класи многочленів, які не можна подати у вигляді суперпозиції деякої кількості функцій f та g.

17. «Гра на калькуляторах»

Катруся й Михайлик мають по калькулятору. Катрусин калькулятор може або збільшити число на 1, або помножити число на 2. Калькулятор Михайлика також може збільшувати число на 1, проте множить на 3. Жодні інші операції калькулятори не виконують. У початковий момент на обох калькуляторах нулі.

17.1. Катруся й Михайлик хочуть отримати на своїх калькуляторах з нуля число 2013. Яка найменша кількість операцій знадобиться для цього Катрусі, а яка Михайлику?

17.2. Наведіть приклади чисел, для отримання яких Катруся може виконати на своєму калькуляторі менше операцій, ніж Михайлик.

17.3. Доведіть, що існує безліч натуральних чисел, для отримання яких Михайлик може застосувати на своєму калькуляторі менше операцій, ніж Катруся.

17.4. Скінченною чи нескінченною є множина всіх натуральних чисел, для отримання яких Катруся може застосувати на своєму калькуляторі менше операцій за Михайлика?

18. «Елегантний черпак»

Господиня чекає гостей і приготувала велику каструлю компоту. Але вона достеменно не знає, скільки буде гостей: чи то 3, чи то 7, чи то 11. Потрібно виготовити красивий і елегантний черпак, котрим можна буде по можливості

порівну розділити напій. Простіше за все було б узяти черпак місткістю 1/231 від об'єму каструлі ($231 = 3\times 7\times 11$), але тоді доведеться розливати дуже довго. Якого найбільшого об'єму може бути черпак, щоб напій можливо було розділити *приблизно* порівну? «Приблизно» означає, що дозволені відхилення до 5%, тобто якщо гостей буде троє, то кожному повинно дістатися напою від 1/3 + 1/60 до 1/3 - 1/60, якщо семеро – від 1/7 + 1/140 до
1/7 - 1/140 від об'єму каструлі, аналогічно для 11 гостей.

19. «Цілі числа і функціональне рівняння»

Нехай $\mathbf{Z}^+$ – множина всіх невід'ємних цілих чисел, n та k – задані натуральні числа. Розглядаються такі неспадні функції $f:\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+$, що $f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^n\right) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\left(f(a_i)\right)^n$ для довільних $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{Z}^+$.

19.1. Знайдіть усі такі функції, коли $n = 2014, k = 2014^{2013}$.

19.2. З'ясуйте, скільки таких функцій і які саме задовольняють умову задачі в залежності від значень параметрів n та k.

20. «Залізничне місце точок»

Із залізничної станції – точки S – виходять дві колії – промені, вздовж яких зі сталими швидкостями рухаються два поїзди-відрізки; промені не лежать на одній прямій. По одній із колій перший поїзд рухається у напрямку до станції S, а по іншій – другий поїзд віддаляється від цієї станції. Розглядатимемо рух поїздів-відрізків лише впродовж такого проміжку часу, протягом якого вони не виїжджають за межі колій-променів. У кожен фіксований момент часу розглядатимемо опуклі чотирикутники, вершинами яких є кінці поїздів-відрізків. З'ясуйте, за якої необхідної та достатньої умови всі точки перетину діагоналей таких чотирикутників лежатимуть на деякій параболі.

21. «Опуклі многогранники»

21.1. Доведіть, що коли жодна грань опуклого многогранника не є трикутником, то існує не менше восьми його вершин, з яких виходить рівно по три ребра. (У куба таких вершин рівно вісім).

21.2. Доведіть, що коли з кожної вершини опуклого многогранника виходить не менше чотирьох ребер, то існує не менше восьми його граней, кожна з яких – трикутник. (У октаедра таких граней рівно вісім).

22. «Ортоцентр та інцентр»

У ΔABC на сторонах BC, CA, AB відмічено основи висот H_1, H_2, H_3 і середини сторін M_1, M_2, M_3; H – ортоцентр ΔABC. Нехай X_2, X_3 – це точки, симетричні до H_1 відносно BH_2 та CH_3; прямі M_3X_2 та M_2X_3 перетинаються в точці X. Аналогічно Y_3, Y_1 – це точки, симетричні до H_2 відносно CH_3 та AH_1; прямі M_1Y_3 та M_3Y_1 перетинаються в точці Y. Нарешті, Z_1, Z_2 – це точки, симетричні до H_3

відносно AH_1 та BH_2; прямі M_1Z_2 та M_2Z_1 перетинаються в точці Z. Довести, що H – інцентр ΔXYZ.

23. «Інверсія»

Вписане коло ω трикутника ABC з центром I дотикається до сторін AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1. Описане коло ΔAB_1C_1 вдруге перетинає описане коло ΔABC в точці K. Нехай M – середина BC, L – середина B_1C_1. Описане коло ΔKA_1M вдруге перетинає ω в точці T. Довести, що описані кола трикутників KLT та LIM дотикаються.

Література до задачі 20:

Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка. – М.: МЦНМО, 2011.

Матеріали для проведення відбіркових етапів турніру підготували:

О.Г. Кукуш, О.О. Курченко, Д.П. Мисак, І.М. Мітельман, М.Д. Плотніков, В.М. Радченко, М.М. Рожкова, П.І. Самовол (Ізраїль), Р.В. Скуратовський, О.К. Толпиго, І.В. Федак, В.Д. Федачківський, Д.І. Хілько, Г.М. Шевченко, В.А. Ясінський, В.М. Журавльов (Росія).