ИЗРАИЛЬСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

П. Самовол,
BGU (Беэр-Шева, Израиль);
e-mail: Pet12@012.net.il

А. Браверман,
Высший академический педагогический колледж им. Кайе (Беэр-Шева, Израиль)
e-mail: braive@gmail.com.

На последней Международной математической олимпиаде 2010 года сборная команда Израиля выступила весьма достойно. Пять школьников продемонстрировали прочные знания и волю к победе. Две медали (среди которых одна серебряная) и одна почетная грамота доказывают, что в Израиле есть ребята, вполне способные конкурировать на уровне мировых стандартов. И что не менее важно – в стране есть вполне компетентные педагоги, которые могут обеспечить обучение математике по самым передовым педагогическим технологиям.

Математические соревнования в системе среднего образования помогают педагогам и родителям включить мощный стимул цели учебы школьника. Олимпиады в Израиле давно доказали свою эффективность в пропаганде математических знаний среди молодежи. Конечно, в стране есть и своя специфика. Укажем только на некоторые аспекты.

В Израиле, как и во многих других странах, работа с одаренными подростками по развитию их творческих способностей осуществляется в разных направлениях. Олимпиады – только одно из них. В отличие от России, в Израиле олимпиадные успехи школьника не дают ему никаких формальных преимуществ (например, поступление без дополнительных экзаменов в ведущий университет страны на престижную специальность). Поэтому многие одаренные дети считают, что тратить время на олимпиадные кружки не выгодно. Вместо того, чтобы готовиться к олимпиаде, тратить время и силы на изучение внепрограммных вопросов, они предпочитают досрочно изучить определенный математический курс в университете, сдать экзамен на высокую оценку, чтобы еще до окончания школы или сразу после этого получить первую или вторую академическую степень. Именно так начал свой путь вхождения в науку израильский ученый профессор Еврейского университета в Иерусалиме, Лауреат престижной премии Филдса 2010 года, Эйлон Линденштраус.

Вместе с тем, есть много школьников, которым нравится участвовать в математических соревнованиях. Для успеха в них нужны не столько вычислительные навыки, сколько сообразительность и умение логически рассуждать. В этой статье мы намерены представить несколько традиционных центров организации математических олимпиад Израиля и привести примеры некоторых интересных задач из соревнований прошлых лет.

I. Математическая олимпиада «Orange»

Организатор – Всеизраильский Педагогический Центр «Мапат»

Математическая олимпиада «Orange» – израильский образовательный проект, который проводится компанией мобильной связи ***Orange*** в тесном сотрудничестве с педагогической ассоциацией Мапат (Шевах Мофет). Выпускники физико-математической школы «Шевах Мофет» известны своими достижениями в физике и математике. В последние 4 года олимпиада проводится в семейном формате. В соревновании ребенок участвует вместе с одним из членов семьи. Олимпиада проводится в трех возрастных группах – для школьников младших, средних и старших классов. Для удобства участников задания предлагаются на русском языке и на иврите. Первые два отборочных тура – заочные (через Интернет) затем следует предпоследний тур (проводится обычно в школе Шевах Мофет; при этом родители и дети получают разные задания и решают их по отдельности) и затем финал. В финале участвуют пары ребенок-родитель (родственник старше 18 лет). В прошлом году в честь юбилея финальный тур транслировался в телевизионном шоу Девятого канала (израильский канал на русском языке). В честь десятилетнего юбилея призы олимпиады были особенными: три победителя (в разных возрастных категориях) получили денежный приз в размере 50 тыс. шекелей (более 14 тыс. долларов США); вторые и третьи места были отмечены ценными подарками. Ниже приведены примеры задач из олимпиады «Orange».

Пример 1 (6–7 класс, 3-й тур)

В шахматном турнире участвовало 16 человек. Каждый сыграл с каждым ровно один раз. За победу дается одно очко, за ничью пол-очка, за поражение 0 очков.

По окончании турнира всем, кто набрал не меньше десяти очков, выдается медаль.

Какое наибольшее количество медалей может быть выдано?

Р е ш е н и е.

Если все игры завершатся вничью, то каждый игрок получит по $\frac{15}{2}$ очков, то есть все вместе получат $16 \cdot \frac{15}{2} = 120$ очков. В любом другом случае сумма всех очков также будет равна 120, т.к. каждая игра дает к общей сумме одно очко при любом исходе. Исходя из этого, даже если каждый «медалист» наберет ровно 10 очков, не более 12 игроков могут получить медали. Это число меньше чем 12, т.к. определенное количество очков получено в играх между 4 остальными игроками (не «медалистами»). Значит не более 11 человек могут получить медали. А это действительно возможно, например: все 11 «медалистов» сыграют вничью между собой (то есть каждый сыграет 10 ничьих и наберет 5 очков) и каждый из них победит всех «немедалистов» (набрав при этом 5 очков).

Пример 2 (8–9 класс, 3-й тур)

Среди всех треугольников, сумма медиан которых равна a, найдите такой, у которого сумма высот максимальна.

Р е ш е н и е.

Кратчайшее расстояние от точки до прямой проходит по перпендикуляру, поэтому медиана всегда не короче высоты проведенной из той же вершины. Соответственно сумма высот не превышает a. Равенство достигается, когда все медианы совпадают с высотами из тех же вершин. А это возможно лишь для равностороннего треугольника. Равносторонний треугольник с заданной стороной всегда можно построить, поэтому искомый треугольник является равносторонним с длиной высоты равной $\frac{a}{3}$.

Пример 3 (10–12 класс, 3-й тур)

Решите уравнение в целых положительных числах:

$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]=$$
$$=\left[\frac{n-1}{1}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right]+2.$$

Квадратные скобки обозначают целую часть числа).

Решение.

Выражение $\left[\frac{n}{k}\right]$ представляет собой количество чисел от 1 до n включительно, которые делятся на k. Поэтому выражение $\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]$ представляет собой количество делителей всех чисел от 1 до n.

Подобным образом выражение $\left[\frac{n-1}{1}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right]$ представляет собой количество делителей всех чисел от 1 до $n-1$.

Из этого следует, что выражение

$$\left(\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]\right)-$$
$$-\left(\left[\frac{n-1}{1}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right]\right)$$

представляет собой количество делителей числа n.

Если количество делителей числа n равно 2, то n – простое.

Ответ: n – любое простое число.

Ниже представлены условия задач третьего тура для 10–11 классов десятой математической олимпиады «Orange» (2010 год)

Третий тур. 10–12 классы

1. Упростить выражение:

$$\frac{24}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}.$$

Ответ: $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$,.

2. Йоси выбирает 3 числа. Мири обозначает их буквами a, b, c по своему выбору. Йоси выигрывает, если у квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ имеются два различных рациональных корня. Есть ли у Йоси выигрышная стратегия?

Ответ: да.

3. Дан четырехугольник $ABCD$, в нем $\angle A = 60°$, $\angle C = 30°$, $AD = AB$.

На сторонах BC и CD соответственно выбраны точки M и N так, что $\angle MAN = 30°$.

Докажите, что $BM^2 + ND^2 = MN^2$.

4. (См. Пример 3 выше).

5. Шесть команд сыграли между собой в волейбол, каждая с каждой по одному разу. В каждой игре есть победитель (ничьих не бывает). Будем считать, что команда *А* сильнее команды *Б*, если команда *А* победила команду *Б*, или команда *А* победила команду, победившую *Б*. Назовем команду чемпионом, если она сильнее всех остальных команд. Может ли быть, что все команды – чемпионы?

Ответ: да.

II. Математическая олимпиада им. проф. Гроссмана

Организатор – Израильский Технологический Институт «Технион»

Олимпиада им. профессора Гроссмана – старейшая математическая олимпиада в Израиле. Она проводится с 1960-го года под патронатом математического факультета Израильского Технологического Института «Технион» (Хайфа). Победители получают денежные призы, а также частичную (или полную) оплату обучения в «Технионе». Ниже представлены условия задач олимпиады 2007 года.

1. Участник математической олимпиады пытался найти сторону a треугольника при данных сторонах b, c и углу α между ними. Он воспользовался теоремой косинусов и свойствами логарифмов с ошибками, написав: $\log a^2 = \log b^2 + \log c^2 - \log(2bx\cos\alpha)$. После этого он продолжил решение (уже без ошибок) и получил правильный ответ. Докажите, что данный треугольник равнобедренный.

2. Дана последовательность, определенная следующим образом: $a_1 = 2$, для $n \geq 1$ $a_{n-1} = a_n^3 - a_n^2 + 1$. Докажите, что любые два члена последовательности являются взаимно простыми числами.

3. Даны две окружности с центрами O_1 и O_2, пересекающиеся в точках A и B. Постройте с помощью циркуля и линейки хорду AC в окружности O_1 таким образом, чтобы вторая точка ее пересечения с окружностью O_2 (назовем ее P) делила эту хорду пополам: $AP = PC$.

4. Существует ли в пространстве прямой параллелепипед, который можно поделить на 2007 прямых параллелепипедов, подобных исходному?

5. Даны положительные числа: a, b, c, x, y, z, такие, что $x + y + z = 1$. Докажите, что

$$ax + by + cz +$$
$$+2\sqrt{(xy + yz + zx)(ab + bc + ca)} \leq$$
$$\leq a + b + c.$$

6. Пусть $p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$ – полином с целыми положительными коэффициентами, имеющий 4 вещественных корня. Докажите, что $p(2006) \geq 2007^4$.

7. На столе лежит колода из 52 карт, на каждой из которых записаны числа от 1 до 52. Карты перемешаны произвольным образом и располагаются «рубашками» вверх. По одной карты снимаются сверху колоды, переворачиваются и складываются в кучки по следующим правилам.

Очередную карту можно класть только на «большую», чем она, карту, или же ее можно положить отдельно, создав новую кучку справа от уже существующих кучек. Цель – получить как можно меньше кучек, выложив все карты колоды.

Миша выбрал стратегию «жадины», складывая каждую следующую карту в самую левую, по возможности, кучку. Докажите, что с помощью этой стратегии он получит минимум кучек, и лучшей стратегии не существует.

III. Математическая олимпиада им. проф. Гиллиса

Организатор – Институт им. Вайцмана

Математическая олимпиада им. проф. Гиллиса проводится научно-исследовательским Институтом им. Вайцмана (Weizmann Institute of Science). Участвовать в ней могут школьники любого возраста (до 18 лет), но фактически это ученики 9–12 классов. Более младшие школьники обычно пробуют свои силы в олимпиаде «Зута», проводимой также Институтом Вайцмана. Олимпиада подразумевает денежные призы, а также частичную (или полную) оплату обучения в одном из ВУЗов Израиля. Победители также получают приглашение в сборную Израиля для участия в международных математических соревнованиях. Ниже представлены условия задач олимпиады 2010 года.

1. Гарри Поттер зашел в магазин в Хогсмиде. Его денег хватает точно на 12 волшебных конфет и 15 шоколадных жаб, или точно на 10 шоколадных жаб и 30 мятных конфет, или точно на 45 мятных конфет и 18 волшебных конфет. Какие наибольшее количество волшебных конфет он может купить?

Ответ: 60.

2. а) Можно ли представить число 2010 суммой двух или более нечетных последовательных чисел? Если да, то дайте пример, если нет – объясните почему.

б) Дайте все возможные представления числа 2009 суммой двух или более нечетных последовательных чисел. Обоснуйте ответ.

Ответ: а) нельзя.

б) Возможные представления:

1) $281 + 283 + ... + 293$;

2) $11 + 13 + ... + 91$;

3) $-7 + (-5) + ... + 89$;

4) $-279 + (-277) + ... + 293$.

3. В соревновании по теннису участвовало 7 игроков. Каждый игрок играет с каждым один раз. У каждого игрока есть своя программа обработки данных, которая принимает результаты и выдает набор списков:

– первый список содержит лишь данного игрока,

– второй список содержит данного игрока и всех тех игроков, кого он обыграл,

– каждый последующий список содержит предыдущий список плюс игроков, которые были обыграны людьми из предыдущего списка,

В определенный момент все игроки получили при помощи своих программ списки, и выяснилось, что у каждого игрока 6-й список отличается от 7-го. Сколько игр состоялось до данного момента? (Замечание: в каждой игре есть победитель, то есть ничья невозможна).

Ответ: 7.

4. Найдите все триномы вида $p(x) = ax^2 + bx + c$, если $a, b, c \in Q$, которые принимают иррациональные значения $p(x)$ для всех иррациональных значений x. Обоснуйте ответ.

Ответ: $a = 0$, $b \neq 0$.

5. Найдите геометрическое место точек (ГМТ) центров тяжести остроугольных треугольников, вписанных в данную окружность. Обоснуйте ответ.

(*Замечание*: центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан).

Ответ: Искомым ГМТ является круг, центр которого совпадает с центром данной окружности и радиус которого равен трети радиуса данной окружности (окружность, ограничивающая указанный круг, ГМТ не принадлежит).

6. Оушен хочет вскрыть сейф, но в последний момент выясняется, что взрывчатка промокла и надо открыть замок. Замок сейфа представляет собой таблицу $n \times n$, в каждой клетке которой находится колесико с цифрами от 0 до 9, расположенными по порядку. Над каждым столбцом и около каждой строки есть кнопка, которая позволяет увеличить все цифры в столбце/строке на 1 (9 переходит в 0). Оушен знает что для открытия замка необходимо обнулить все цифры в таблице с помощью нажатий кнопок. Но времени мало...

а) Докажите, что Оушен сможет открыть замок менее чем за $18n$ нажатий кнопок;

б) докажите, что Оушен сможет открыть замок не более чем за $9n$ нажатий кнопок.

Обоснуйте ответ.

7. Учитель попросил представить число 987654321 как сумму двух натуральных чисел, состоящих из цифр: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, причем каждая цифра повторяется только один раз. Один ученик заявил, что нашел 396 разных решений. Не ошибся ли он?

Ответ: ученик ошибся.

8. (Последний тур). Вычислите без калькулятора значение

$$S=\sqrt{1-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1\cdot 3}}+\sqrt{2-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3\cdot 5}}+$$
$$+\sqrt{3-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5\cdot 7}}+\ldots+\sqrt{40-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{79\cdot 81}}.$$

Решение.

Рассмотрим сумму общего вида

$$S_n=\sqrt{\frac{2-\sqrt{1\cdot 3}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{3\cdot 5}}{2}}+$$
$$+\sqrt{\frac{6-\sqrt{5\cdot 7}}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{2n-\sqrt{(2n-1)\cdot(2n+1)}}{2}}.$$

Используя формулу составного радикала

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

выразим n-ое слагаемое этой суммы по-другому:

$$a_n=\sqrt{\frac{2n-\sqrt{(2n-1)\cdot(2n+1)}}{2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{2n+1}{4}}-\sqrt{\frac{2n-1}{4}}.$$

При сложении почти все радикалы из-за различия в знаках взаимно уничтожаются:

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\sqrt{\frac{2n+1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}.$$

Итак, $S_{40}=\sqrt{\frac{81}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}=4.$

Ответ: 4.

IV. Всеизраильская Олимпиада по математике «Зута»

Организатор – Институт им. Вайцмана

Математическая олимпиада «Зута» проводится научно-исследовательским Институтом им. Вайцмана. Участвовать в ней могут школьники 7–9 классов. Опять же, участие детей из более младших классов также приветствуется, причем каждый имеет шанс победить. В этой олимпиаде два тура. Первый – заочный, длится примерно месяц и происходит в конце ноября. Во второй тур проходят те, кто хорошо решил задачи первого тура. Он проводится обычно весной в очной форме (непосредственно в Институте им. Вайцмана). Олимпиада подразумевает денежные и другие призы. Ниже представлены условия задач олимпиады первого тура для 8-го класса 2010–2011 годов.

1. За круглым столом сидят 8 человек: рыцари и мошенники. Рыцари всегда говорят только правду, мошенники всегда лгут. Логик подошел к ним и спросил: «Если не считать тебя, то кого за столом больше: мошенников или рыцарей?». Так он опросил 5 человек, и все ответили: «Мошенников!» Сколько рыцарей сидит за столом?

Ответ: 4.

2. Упорядочьте числа 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 следующим образом. Запишите их в ряд так, чтобы между двумя числами «1» стояло лишь одно число, между двумя числами «2» – два числа, между двумя числами «3» – три числа, между двумя числами «4» – четыре числа.

Ответ: 4, 1, 3, 1, 2, 4, 3, 2.

3. В словаре для нумерации страниц использовано 2010 цифр. Сколько страниц в словаре?

Ответ: 706.

4. С помощью одного разреза (по прямой) необходимо разрезать круглый пирог с кусочком шоколада в форме правильного шестиугольника так, чтобы пирог и шоколад разделились на две равных площади (рис. 1).

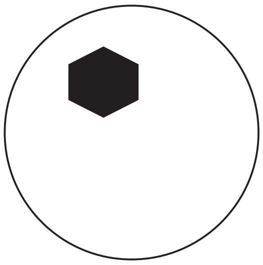

Рис. 1

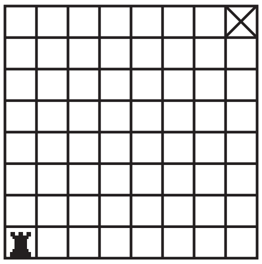

Рис. 2

О т в е т: провести прямолинейный разрез через центр пирога центр шестиугольника.

5. В таблице 8×8 записаны числа от 1 до 64 в произвольном порядке без повторений. Докажите, что существуют два соседних числа, разность между которыми не меньше 5 (соседними называются числа, стоящие в клетках с общей стороной).

6. а) Найдите остаток от деления суммы $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2010^2$ на 3.

б) Найдите остаток от деления суммы $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2010^2$ на 5.

в) Найдите остаток от деления суммы $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2010^2$ на 15.

О т в е т: а) 2 б) 0 в) 5.

7. Шахматная ладья стоит в левом нижнем углу шахматной доски (рис. 2). Два игрока играют в следующую игру: каждый по очереди двигает ладью вправо или вверх на произвольное количество клеток (по правилам хода ладьи). Поигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход (то есть выигрывает тот, кто первым достигнет правого верхнего угла доски). У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

О т в е т: у второго.

8. Разместите на плоскости 6 точек и соедините их непересекающимися отрезками так, чтобы каждая точка была соединена с 4 другими точками.

О т в е т: (см. рис. 3).

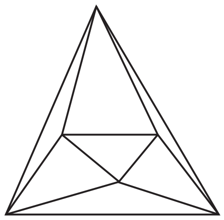

Рис. 3

Заключение

Завершая разговор о математических олимпиадах в Израиле, следует отметить, что кроме математических олимпиад в стране огромной популярностью у молодежи пользуются многоэтапные соревнования «Конкурс молодых ученых» http://www.mada.org.il/en/.

Победить на этом соревновании может тот, кто представит членам компетентного жюри из известных ученых Израиля свою исследовательскую работу или проект. Победители награждаются весьма ценными подарками и правом участия в подобных международных проектах. Подробнее об этих соревнованиях мы расскажем в следующей статье.

Также в настоящее время министерство просвещения начало глобальную реформу в организации и проведении математических олимпиад. Будут ли изменения эффективны – покажет время.