Уравнения и системы уравнений на израильских олимпиадах.

В.М. Журавлев (Москва, Россия), П. И. Самовол (Beer-Sheva, Israel)

13 мая 2014 г.

Израильские школьники уже много лет подряд принимают участие в различных международных математических олимпиадах. На IMO 2013 года сборная команда Израиля выступила весьма достойно. Все шесть школьников продемонстрировали прочные знания и волю к победе. Шесть медалей (среди которых одна Золотая, три Серебряные и две Бронзовые, 11 место в общем зачёте, и абсолютное первенство одного из участников-38 очков из 42)-убеждают, что в Израиле есть ребята, вполне способные конкурировать на мировом уровне. Что не менее важно, - в стране построена система подготовки, которая помогает школьникам обучаться математике по самым передовым педагогическим технологиям.

Школьник, который получил право участвовать в заключительном туре национальной математической олимпиады своей страны, как правило, уже далеко не новичок в решении олимпиадных задач. Поэтому организаторы финальных туров стараются подбирать такие задания, с помощью которых можно было бы более точно диагностировать креативные способности участников в самых разных областях математики.

Специфической особенностью заданий на Израильских математических олимпиадах, пожалуй, является постоянное наличие заданий с существенными техническими трудностями. Это делается с целью определения интеллектуальной выносливости школьника. Отметим, что сама техническая трудность в решении олимпиадного уравнения, как правило, это "вершина айсберга". Преодолеть её легче тогда, когда станет понятно, как связана данная задача с некоторой математической моделью или теорией.

В этой статье мы хотим познакомить читателя с тематической подборкой олимпиадных задач предлагавшихся в разные годы на национальных Израильских олимпиадах (MOI)и других международных конкурсах. Почти все решения, предложенных примеров, демонстрируют определённый метод. Это сделано авторами намеренно, так как овладение учащимися методами познания и понимание того, в каких случаях их можно применять является одной из высших целей обучения и самообразования. По мнению многих выдающихся учёных, (например Декарта), методы, в отличие от изолированных теорем и результатов, обладают динамикой. При этом они более универсальны в отношении области применения.

Подчеркнём, что методы - это рабочие инструменты для интеллектуальной деятельности. Методами необходимо уметь пользоваться, но еще лучше, если учащийся научится открывать их сам. Как же изучать методы? Из множества конструктивных советов выделим три:

необходимо осознать все математические идеи, которые обеспечивают доказательность изучаемого метода;

проанализировать несколько задач, решение которых получено данным методом;

пытаться придумывать новые задачи, которые можно решить изучаемым методом.

Хотя на олимпиадах достаточно часто встречаются задачи на решение уравнений в целых числах, в рамках этой небольшой статьи мы не будем затрагивать эту тему. Авторы считают, что такая тема требует отдельной статьи.

Начнем.

Задача 1 (5 Соровская олимпиада, 1998 год) . *Решить уравнение:*

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=x.$$

Любое традиционное возведение в степень, с целью "нейтрализовать"радикал приводит к уравнению восьмой степени:

$$\left(2-\left(x^2-2\right)^2\right)^2-2=x.$$

Проверка показывает, что целых корней это уравнение не имеет.Тупик.

Решение. Попробуем начать рассуждать с самого начала. Избавиться от корней иногда удобно не только с помощью возведения в степень. Тот же эффект можно получить с помощью тригонометрических подстановок. Например, попробуем использовать тождество: $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$. На множестве $0\le x\le 2$, удобнее обозначить $x=2\cos\gamma$ при $0\le\gamma\le\frac{\pi}{2}$. Тогда получим $\sqrt{2+x}=2\cos\frac{\gamma}{2}$. И окончательно, искомое уравнение преобразуется в уравнение:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{8}\right)=\cos\gamma.$$

Отсюда находим единственное решение $\gamma=\frac{2\pi}{9}$. И, следовательно, $x=2\cos\frac{2\pi}{9}$.

Ответ: $x=2\cos\frac{2\pi}{9}$.

Задача 2 (MOI, 2003 год) . *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} x+\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) &= y\\ y+\lg\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) &= z\\ z+\lg\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) &= x \end{cases}.$$

Решение. Ответ: $x=y=z=0$.

Обозначим $f(t)=t+\lg\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$. Из условия задачи сразу получаем, что $f(f(f(x)))=x$. Поскольку, $f(t)=t+\lg\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$ - возрастающая функция, то нетрудно показать, что это возможно только при $f(x)=x$. Но тогда $x=y=z=0$.

Действительно, покажем, что если $y=f(x)$ - возрастающая функция, то уравнения $f(x)=x$ и $f(f(x))=x$ -равносильны. В самом деле, если x_0 -корень уравнения $f(x)=x$, т.е. $f(x_0)=x_0$. Тогда $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$. следовательно, x_0 - будет корнем уравнения $f(f(x))=x$. С другой стороны, предположим, что x_0 -корень уравнения $f(f(x))=x$, то есть, $f(f(x_0))=x_0$. И предположим, что $f(x_0)\ne x_0$. Если $f(x_0)>x_0$, то поскольку $y=f(x)$ возрастающая функция, получаем $f(f(x_0))>f(x_0)>x_0$. Противоречие.

Аналогично, если $f(x_0)<x_0$, то $f(f(x_0))<f(x_0)<x_0$. Что и т.д.

Отметим, что вышеуказанное, правило можно расширить. Если $y=f(x)$- монотонная функция, то уравнения $f(x)=x$ и $\underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(x)\ldots)=x$ -равносильны.

Задача 3 (MOI, 2006 год) . *Дана система уравнений:*

$$\begin{cases} \sin x_1+\sin x_2+\sin x_3+\ldots+\sin x_n &= 0\\ \sin x_1+2\sin x_2+3\sin x_3+\ldots n\sin x_n &= 100 \end{cases}.$$

При каком наименьшем значении параметра n искомая система имеет действительные решения.

Решение. Ответ: $n=20$.

Путь $k=const$ некоторое целое постоянное число такое, что $0<k<n$. Умножим первое уравнение на k и полученное выражение вычтем из обеих частей второго уравнения. Получим:

$$[(1-k)sinx_1+(2-k)sinx_2+\ldots+(-1)sinx_{k-1}+(k-k)sinx_k]+$$

$$+[sinx_{k+1}+2sinx_{k+2}+\ldots+(n-k)sinx_n]=100.$$

Понятно, что

$$(1-k)sinx_1+(2-k)sinx_2+\ldots+(-1)sinx_{k-1}+(k-k)sinx_k\le 1+2+3+\ldots+(k-1)$$

. и

$$sinx_{k+1}+2sinx_{k+2}+\ldots+(n-k)sinx_n\le 1+2+3+\ldots+(n-k).$$

Значит,

$$100\le\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}-kn+k(k-1).$$

Теперь возьмем $k=[\frac{n}{2}]$, где $[x]$-целая часть числа.

Тогда для четных n получим $k=\frac{n}{2}$

$$100\le\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1).$$

Откуда $100\le\frac{n^2}{4}$, следовательно $n\ge 20$.

Для нечетных n получим $k=\frac{n-1}{2}$

$$100\le\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right).$$

Откуда $398\le n(n+1)$, следовательно $n\ge 21$.

Очевидно, можно указать решение для $n=20$

$$\sin x_1=\sin x_2=\ldots=\sin x_9=\sin x_{10}=-1,\sin x_{11}=\sin x_{12}=\ldots=\sin x_{20}=1$$

Следующие задачи проще всего решить с помощью геометрической модели.

Задача 4 (MOI, 1999 год) . *Даны три действительных числа $a>0$, $b>0$, $c>0$. Известно, что $a+b+c=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найти три таких действительных числа $x>0$, $y>0$, $z>0$, что*

$$\sqrt{y^2-a^2}+\sqrt{z^2-a^2}=\sqrt{z^2-b^2}+\sqrt{x^2-b^2}=\sqrt{x^2-c^2}+\sqrt{y^2-c^2}=1.$$

Выразить x, y, z через a, b, c.

Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC, такой, что $AB=BC=CA=1$. Высота такого треугольника будет иметь длину $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда, если внутри треугольника взять точку P, то сумма расстояний от неё до сторон треугольника равна высоте треугольника ABC. Поэтому можно считать, что перпендикуляры, опущенные из точки P на стороны треугольника, будут иметь длины a, b, c. Искомые числа x, y, z – это расстояния от точки P до вершин треугольника. То есть, $PA=x$, $PB=y$, $PC=z$. С помощью теоремы Пифагора можно обосновать, что на этой модели все условия задачи выполняются.

Теперь с помощью основных формул тригонометрии, нетрудно получить, что

$$x=2\sqrt{\frac{b^2+c^2+bc}{3}},y=2\sqrt{\frac{a^2+c^2+ac}{3}},z=2\sqrt{\frac{a^2+b^2+ab}{3}}.$$

Ответ: $x=2\sqrt{\frac{b^2+c^2+bc}{3}},y=2\sqrt{\frac{a^2+c^2+ac}{3}},z=2\sqrt{\frac{a^2+b^2+ab}{3}}$.

Задача 5 (130 красивых задач) . *Имеет ли система уравнений*

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=4\\ x^2+xz+z^2=9\\ y^2+yz+z^2=36\end{cases}.$$

положительные решения?

Решение. Неравенство треугольника является ключом к решению. Предположим существует тройка положительных чисел удовлетворяющихданной системе. Отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ такие, что $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$ Надеемся читатели самостоятельно нарисуют несложный рисунок. Тогда для отрезков AB, AC и BC должно выполнятся неравенство треугольника, т.е. $AB+AC > BC$ Но учитывая уравнения системы имеем $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 6$.

Ответ: Положительных решений не существует.

Задача 6 (MOI, 1991 год) [1]. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} yz + xz + xy = 1 \\ \frac{3(x^2+1)}{x} = \frac{4(y^2+1)}{y} = \frac{5(z^2+1)}{z} \end{cases}.$$

Решение. Из условия сразу следует, что числа x, y, z одного знака. Не теряя общности, предположим, что $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Теперь можно ввести обозначения: $x = \tan\alpha > 0$, $y = \tan\beta > 0$, $z = \tan\gamma > 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{(x + y + z) - xyz}{1 - (xy + xz + yz)}.$$

Из условия имеем, что $yz + xz + xy = 1$, следовательно знаменатель выражения $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$ обращается в 0 и $\tan(\alpha + \beta + \gamma)$- не определен. Значит, $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Поэтому, углы 2α, 2β, 2γ являются внутренними углами некоторого треугольника. Получаем

$$\frac{x^2 + 1}{x} = \tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \frac{y^2 + 1}{y} = \frac{2}{\sin 2\beta}, \frac{z^2 + 1}{z} = \frac{2}{\sin 2\gamma}.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\frac{3}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin 2\beta} = \frac{5}{\sin 2\gamma}.$$

А этот факт означает, что отношение длин сторон треугольника равно отношению $3 : 4 : 5$. Тогда сразу получаем, что $2\gamma = \frac{\pi}{2}$ и $\gamma = \frac{\pi}{4}$. Значит $z = \tan\gamma = 1$, тогда $x = \frac{1}{3}$ и $y = \frac{1}{2}$.

Ответ: $z = 1$, $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{2}$.

Мы дадим два решения следующей задачи. Хотя первый способ решения выглядит короче, второй способ, позволяет нам оценить глубокие связи этой задачи с уже разработанными разделами математики.

Задача 7 (MOI, 2014 год) . ***Найти хотя бы один действительный корень уравнения:***

$$\frac{x^7}{7} = 1 + x\left(x^2 - \sqrt[7]{10}\right)^2 \cdot \sqrt[7]{10}.$$

Решение. Первый способ.

Будем искать решение в виде $x = \sqrt[7]{a} + \sqrt[7]{b}$. Далее

$$\frac{x}{7} = \frac{a}{7} + \sqrt[7]{a^6 b} + 3\sqrt[7]{a^5 b^2} + 5\sqrt[7]{a^4 b^3} + 5\sqrt[7]{a^3 b4} + 3\sqrt[7]{a^2 b^5} + \sqrt[7]{ab^6} + \frac{b}{7}$$

$$\frac{x}{7} = \frac{a + b}{7} + \sqrt[7]{ab}\left(\sqrt[7]{a} + \sqrt[7]{b}\right)\left(\sqrt[7]{a^4} + 2\sqrt[7]{a^3 b} + 3\sqrt[7]{a^2 b^2} + 2\sqrt[7]{ab^3} + \sqrt[7]{b^4}\right)$$

$$\frac{x}{7} = \frac{a + b}{7} + \sqrt[7]{ab}\left(\sqrt[7]{a} + \sqrt[7]{b}\right)\left(\sqrt[7]{a^2} + \sqrt[7]{ab} + 3\sqrt[7]{b^2}\right)^2$$

$$\frac{x}{7} = \frac{a + b}{7} + \sqrt[7]{ab}x\left(x^2 - \sqrt[7]{ab}\right)^2.$$

[1] задача также предлагалась в Задачнике Кванта М703

Сравним данное уравнение с исходным $\frac{x^7}{7} = 1 + x\left(x^2 - \sqrt[7]{10}\right)^2 \cdot \sqrt[7]{10}$. Получим, что $ab = 10$ и $a + b = 7$. Теперь понятно, что можно взять $a = 2$, $b = 5$ (или наоборот $a = 5$, $b = 2$). В любом случае число $x = \sqrt[7]{2} + \sqrt[7]{5}$ будет корнем уравнения.

Второй способ. Для удобства обозначим $c = \sqrt[14]{10}$. Сделаем замену переменной $x = cy$. Получим

$$\frac{(cy)^7}{7} = 1 + cy(c^2y^2 - c^2)^2 \cdot c^2.$$

$$\frac{c^7y^7}{7} = 1 + c^7y(y^2 - 1)^2.$$

Или $\frac{y^7}{7} = \frac{1}{c^7} + y(y^2-1)^2$. То есть $\frac{y^7}{7} - y^5 + 2y^3 - y = \frac{1}{c^7}$, Пусть $P(y) = \frac{y^7}{7} - y^5 + 2y^3 - y$. Этот полином является „замаскированным“полиномом Чебышева первого рода. Действительно, если $T_7(y) = 64y^7 - 112y^5 + 56y^2 - 7y$ -многочлен Чебышева, то

$$P(y) = \frac{y^7}{7} - y^5 + 2y^3 - y = \frac{2}{7}T_7\left(\frac{y}{2}\right).$$

Тогда наше уравнение перепишется в виде

$$T_7\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{7}{2c^7}.$$

Для решения уравнения применим теорию многочленов Чебышева. Известно, что

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n}{2}.$$

Поэтому, сделав замену $z = y/2$, получим

$$T_7(z) = \frac{(z + \sqrt{z^2-1})^7 + (z - \sqrt{z^2-1})^7}{2} = \frac{7}{2c^7}.$$

Обозначим

$$t = (z - \sqrt{z^2-1})^7.$$

Поскольку

$$(z - \sqrt{z^2-1})^7 = \frac{1}{(z + \sqrt{z^2-1})^7},$$

то получим следующее уравнение

$$t + \frac{1}{t} = \frac{7}{c^7},$$

которое сводиться к квадратному уравнению $t^2 - \frac{7}{c^7}t + 1 = 0$. Получим решения $t_1 = \frac{2}{c^7}$, $t_2 = \frac{5}{c^7}$.

Далее, из подстановки $t = (z - \sqrt{z^2-1})^7$ получаем:

$$z = \frac{\sqrt[7]{t^2} + 1}{2\sqrt[7]{t}}, y = 2z, x = cy = c\frac{\sqrt[7]{t^2} + 1}{\sqrt[7]{t}}.$$

Вспоминая, что $c = \sqrt[14]{10}$ находим $x_1 = \sqrt[7]{2} + \sqrt[7]{5}$.

О свойствах полиномов Чебышева подробно рассказывается журнале Квант № 1, 1982 стр 12-13 в статье "Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения". Ниже приведена таблица из этой статьи

По свойствам полиномов Чебышева, получаем:

$$\frac{2}{7}T_7\left(\frac{y}{2}\right) = \begin{cases} \frac{2}{7}\cos\left(7\arccos\left(\frac{y}{2}\right)\right), & |y| \le 2 \\ \frac{2}{7}\cosh\left(7\cosh^{-1}\left(\frac{y}{2}\right)\right), & |y| \ge 2 \end{cases}.$$

n	T_n	U_n
0	1	1
1	x	$2x$
2	$2x^2-1$	$4x^2-1$
3	$4x^3-3x$	$8x^3-4x$
4	$8x^4-8x^2+1$	$16x^4-12x^2+1$
5	$16x^5-20x^3+5x$	$32x^5-32x^3+6x$
6	$32x^6-48x^4+18x^2-1$	$64x^6-80x^4+24x^2-1$
7	$64x^7-112x^5+56x^3-7x$	$\ldots$

Рассмотрим это место подробнее. Для $\phi = \cos h^{-1}\left(\frac{7}{2\sqrt{10}}\right)$, получаем

$$e^{\phi} = \frac{7+\sqrt{7^2-(2\sqrt{10})^2}}{2\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

Тогда

$$x = 10^{\frac{1}{14}}\left(e^{\frac{\phi}{7}} + e^{-\frac{\phi}{7}}\right) = \sqrt[7]{5} + \sqrt[7]{2}$$

Все комплексные решения можно найти по формуле

$$x_k = e^{\frac{2\pi k i}{7}}\sqrt[7]{5} + e^{\frac{-2\pi k i}{7}}\sqrt[7]{2}, \text{где } k = 1, 2, \ldots, 7.$$

Используя технику изложенную во втором способе решения этой задачи, мы предлагаем читателям самостоятельно составить и решить аналогичные задачи, соответствующие полиномам Чебышева пятой, шестой и восьмой степени.

Уравнения и системы уравнений иногда могут встречаться в словесной формулировке

Задача 8 (MOI, 2006 год) [2] *Профессор Мумбум-Плюмбум написал программу, которая умеет вычислять придуманную им функцию $mumb(x)$. Профессор утверждает, что если на экране калькулятора ввести произвольное число x и нажать клавишу „Ввод", то на его месте всегда появиться значение функции $mumb(x)$. При этом, если повторно нажать клавишу „Ввод", то в результате этих двух нажатий появится значение выражения $3|x|-4$. Не ошибается ли профессор? Что покажет калькулятор, если ввести число $x = 0.8$ и один раз нажать клавишу „Ввод"?*

Решение.

Фактически имеем дело с функциональным уравнением $f(f(x)) = 3|x| - 4$.

Предположим, что профессор Мумбум-Плюмбум не ошибается. Тогда, набрав число $x = 0.8$ и дважды нажав клавишу „Ввод", мы получим число $3 \cdot 0.8 - 4 = -1.6$. Затем, ещё раз дважды нажав „Ввод", получим число $3 \cdot |-1.6| - 4 = 0.8$. Это наблюдение позволяет установить соотношение, которому должно удовлетворять число $mumb(0.8) = z$, если оно существует. А именно: пятикратное нажатие клавиши „Ввод" должно привести к тому же результату, что и однократное нажатие, если первоначально на экране набрали число 0.8. Поэтому, $3 \cdot \Big|3|z|-4\Big| - 4 = z$. Это уравнение, являющееся следствием утверждения профессора Мумбум-Плюмбум, имеет корни $-1.6, -1, 0.8, 2$. Убедимся, что ни один из этих корней не подходит. В самом деле

1. Если $mumb(0.8) = 0.8$, то многократное нажатие клавиши „Ввод" будет порождать цепочку значений:

$$0.8 \to 0.8 \to 0.8 \to 0.8 \to \ldots$$

и число -1.6 никогда не получиться.

[2]эта авторская задача также была опубликована в журнале Квант №6 за 2007 год, стр. 25.

2. Вариант $mumb(0.8) = -1.6$ порождает цепочку значений:

$$0.8 \to -1.6 \to u \to 0.8 \to -1.6 \to \dots .$$

(Здесь u -некоторое число). Таким образом, при четырёхкратном нажатии клавиши „Ввод “ число 0.8 преобразуется в число -1.6, чего не может быть.

3. Случай $mumb(0.8) = -1$ и $mumb(0.8) = 2$ порождают, соответственно цепочки:

$$0.8 \to -1 \to v \to -1 \to v \to -1 \to \dots$$

и

$$0.8 \to 2 \to w \to 2 \to w \to 2 \to \dots .$$

В этих случаях каждая из величин v и w должна одновременно равняться -1.6 (при двукратном нажатии "Ввод") и 0.8 при четырёхкратном нажатии), что невозможно.

Так что профессор Мумбум-Плюмбум, увы, ошибается.

В заключение заметим, что корректно работающий калькулятор при вводе аргумента 0.8 и однократном нажатии клавиши „Ввод “ должен выдавать сообщение о том, что функция $y = mumb(x)$ в точке $x = 0.8$ не определена. Реакция же программы, написанной профессором Мумбумом-Плюмбумом, непредсказуема.

Вместо заключения.

В качестве домашнего задания мы предложим несколько олимпиадных задач. Надеемся школьники сами испытают свои силы при поиске решения этих задач. Для проверки мы всё же укажем правильные ответы.

Задача 9 (MOI, 2013 год) . *Дано уравнение относительно x:*

$$(2\sqrt{2}\cos 25^\circ - 1)\tan x^\circ = (2\sqrt{2}\sin 25^\circ - 1)\tan kx^\circ.$$

Найти все натуральные числа k такие, что всякое решение уравнения, (выраженное в градусах), будет целым числом.

Ответ: $k = 7$.

Задача 10 (MOI, 2012 год) . *Заданы действительные числа a, b, c, p, q, r. Так же известно, что $a < b < c$ и что p, q, r - три положительные числа. Рассмотрим уравнение с одной неизвестной x.*

$$\frac{p}{x-a} + \frac{q}{x-b} + \frac{r}{x-c} = 1.$$

Доказать, что у данного уравнения есть три действительных решения и ровно одно из них больше c.

Задача 11 (MOI, 2002 год) . *Для всех действительных x, y, z решить уравнение*

$$\cos(y-z) + \cos(z-x) + \cos(x-y) + 2 = 0.$$

Ответ: нет решений.

Задача 12 (MOI, 2006 год) . *Для каких вещественных a, b у данного уравнения есть единственное решение.*

$$\sqrt[3]{(ax+b)^2} + \sqrt[3]{(ax-b)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2+b^2} = \sqrt[3]{b}.$$

Ответ: $a \neq 0$ и $b \in \{0, 1\}$.

Мы предложили читателям небольшую толику олимпиадных задач, связанных с уравнениями и системами уравнений. В этих задачах мы обнаруживаем не только оригинальную олимпиадную идею, но порой, и глубокую связь с серьезными разделами современной науки.