

Рівняння в цілих числах: метод локалізації (за мотивами XIX Всеукраїнського турніру юних математиків)

Мороз М.П.

Вступ

На математичних змаганнях значної популярності набули рівняння в цілих числах. Це рівняння з двома невідомими або більшою кількістю, для яких пропонується знайти лише цілочисельні розв'язки.

Не існує загального методу розв'язування рівнянь в цілих числах. Проте, існують методи, що дозволяють розв'язати достатньо широкий клас цих рівнянь. Такими є метод перебору та метод розгляду залишків при діленні на певне число. Останній, як правило, використовують для доведення того, що рівняння цілих розв'язків не має.

У даній статті йдеться про ще один метод, а саме **метод локалізації**. Суть цього методу полягає в тому, що з рівняння як наслідок отримують обмеження на значення деякого цілого виразу зі змінними. Це дозволяє звести задачу до перебору, який, проте, не завжди легко помітити.

Цей метод знайшов своє застосування до кількох задач XIX Всеукраїнського турніру юних математиків, запропонованих автором даної статті. Надалі ми детально розберемо ці та інші задачі з різних математичних змагань, до яких можна було застосувати даний метод.

1. Концепція методу локалізації

Розглянемо рівняння $P(x, y) = 0$, де $P(x, y)$ – деякий вираз від змінних x та y . Нехай з рівняння $P(x, y) = 0$ як наслідок можна отримати рівність $f(x, y) = F(x, y)$, де $f(x, y)$ – деякий вираз, який при цілих значеннях змінних теж набуває лише цілих значень, а $F(x, y)$ – деякий вираз від змінних x та y .

Виконаємо верхню та нижню оцінки виразу $F(x, y)$. Якщо нам вдалося одержати подвійну нерівність $A \leq F(x, y) \leq B$, де A та B – деякі цілі числа, то як

наслідок маємо, що $A \leq f(x, y) \leq B$. Оскільки $f(x, y)$ при цілих значеннях змінних може набувати лише цілих значень, то стає можливим перебір за всіма потенційними значеннями $f(x, y)$ (з відповідними підстановками в початкове рівняння).

Нехай рівняння $f(x, y) = C$ таке, що з нього не складно виразити змінну y через змінну x : $y = \lambda_C(x)$. Тоді для всіх цілих значень $C \in [A, B]$ можемо виконати підстановку $y = \lambda_C(x)$ в початкове рівняння. Таким чином можна звести рівняння з двома невідомими до скінченної кількості рівнянь з одним невідомим.

2. Приклад застосування методу локалізації

Щоб якомога ліпше відчувати як діє метод локалізації, розберемо для початку простішу задачу.

Задача 1 (ЛІ Всеукраїнська математична олімпіада, 2011, 10 клас, автор – Д. Мисак). Розв'яжіть у натуральних числах (x, y) рівняння

$$(x + y)^3 = (x - y - 6)^2.$$

Розв'язання. Оскільки числа x та y натуральні числа, то дане рівняння рівносильне наступному: $x + y = \left(\frac{x - y - 6}{x + y} \right)^2$. Очевидно, що пари $(1, 1)$, $(1, 2)$ та $(2, 1)$ не є розв'язками рівняння. Тому надалі вважатимемо, що x та y більші за 2.

Виконаємо очевидні оцінки:

$$4 \leq x + y = \left(\frac{x - y - 6}{x + y} \right)^2 \leq \left(\frac{x + y + 6}{x + y} \right)^2 = \left(1 + \frac{6}{x + y} \right)^2 \leq \left(1 + \frac{3}{2} \right)^2 = 6,25.$$

Звідси випливає, що $x + y$ може набувати лише значень 4, 5 або 6. Маємо три випадки.

$$\begin{aligned} 1) x + y = 4 &\Rightarrow 4^3 = (x + y - 2y - 6)^2 = (4 - 2y - 6)^2 = (2y + 2)^2 = 4 \cdot (y + 1)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 16 = (y + 1)^2 \Rightarrow y + 1 = 4 \Rightarrow y = 3, x = 1. \end{aligned}$$

2) $x + y = 5 \Rightarrow 5^3 = (x + y - 2y - 6)^2 = (5 - 2y - 6)^2 = (2y + 1)^2$. Але 5^3 не є повним квадратом. Тому в цьому випадку рівняння розв'язків не має.

3) $x + y = 6 \Rightarrow 6^3 = (x + y - 2y - 6)^2 = (6 - 2y - 6)^2 = (2y)^2$. Але 6^3 не є повним квадратом. Тому в цьому випадку рівняння теж не має розв'язків.

Відповідь: $(1, 3)$.

В цій задачі нам вдалося локалізувати значення суми $x + y$ та отримати перебір лише з трьох випадків.

Зауваження. Для отримання сильнішої оцінки деякого виразу, інколи доцільно виконати перевірку кількох «перших» значень наборів невідомих, аби потім вважати кожен з них більшою чи меншою за деяке число. В задачі 1 ми одразу перевірили набори $(1, 1)$, $(1, 2)$ та $(2, 1)$, що дозволило нам вважати, що $x, y > 2$. Якби ми цього не зробили і вважали, що $x, y \geq 1$, то отримали б за аналогічних міркувань оцінку $2 \leq x + y \leq 16$. А це спричинило б перебір аж 15 випадків, з яких 14 були б марними.

3. Метод локалізації в задачах XIX ТЮМу

Наступні дві задачі пропонувалися на відбіркових етапах XIX Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М. Й. Ядренка.

Задача 2 (XIX Всеукраїнський ТЮМ, 2016, автор – М. Мороз) Розв'яжіть у цілих числах x і y рівняння $\sqrt{x^3 - 3xy^2 + 2y^3} = \sqrt[3]{13x + 8}$.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$\sqrt{x^3 - 3xy^2 + 2y^3} = |x - y| \sqrt{x + 2y}.$$

Зрозуміло, що $x, y \neq 0$ та $x \neq y$, в чому можна впевнитися звичайною підстановкою. Оскільки ліва частина може приймати лише невід'ємних значень, то права частина теж невід'ємна, причому, як бачимо, не може бути рівною нулю. Тому жоден множник лівої частини рівняння теж не дорівнює нулю.

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Нехай $y \geq 1$. Тоді як наслідок з рівняння отримуємо рівність

$$|x - y| = \frac{\sqrt[3]{13x+8}}{\sqrt{x+2y}}.$$

Для виразу $\frac{\sqrt[3]{13x+8}}{\sqrt{x+2y}}$ не важко отримати верхню та нижню оцінки:

$$0 < \frac{\sqrt[3]{13x+8}}{\sqrt{x+2y}} = \sqrt[6]{\frac{(13x+8)^2}{(x+2y)^3}} < \sqrt[6]{\frac{13^2 \cdot (x+2)^2}{(x+2)^3}} = \sqrt[6]{\frac{13^2}{x+2}} \leq \sqrt[6]{\frac{169}{3}} < \sqrt[6]{57} < \sqrt[6]{64} = 2.$$

Отже, $0 < |x - y| < 2$, а тому розв'язки рівняння, якщо такі існують, задовольняють рівність $|x - y| = 1$. Розглянемо два підвипадки.

а) Нехай $y = x - 1$. Тоді, якщо зробити відповідну підстановку, рівняння набуває вигляду $\sqrt{3x-2} = \sqrt[3]{13x+8}$, звідки отримуємо

$$(3x-2)^3 = (13x+8)^2.$$

$$\text{Звідси } 27x^3 = 223x^2 + 172x + 72, \text{ тобто } 3^3x^3 = 223x^2 + 43 \cdot 2^2 \cdot x + 2^3 \cdot 3^2.$$

Маємо, що $2^3 \cdot 3^2$ ділиться на x . Зрозуміло, що x не ділиться на 2, оскільки в цьому випадку один з доданків не ділитиметься на таку степінь двійки, на яку діляться всі інші доданки. Тому x може дорівнювати лише 3 або 9. Після перевірки знаходимо, що $x = 9$. Звідси $y = 8$.

б) Нехай $y = x + 1$. Тоді, якщо зробити відповідну підстановку, рівняння набуває вигляду $\sqrt{3x+2} = \sqrt[3]{13x+8}$, звідки отримуємо $(3x+2)^3 = (13x+8)^2$.

$$\text{Звідси } 27x^3 = 115x^2 + 172x + 56, \text{ тобто } 3^3x^3 = 5 \cdot 23x^2 + 43 \cdot 2^2 \cdot x + 2^3 \cdot 7.$$

Отже, $2^3 \cdot 7$ ділиться на x . Очевидно, що x не ділиться на 2, оскільки в цьому випадку один з доданків не ділитиметься на таку степінь двійки, на яку діляться всі інші доданки. Тому x може дорівнювати тільки 1 або 7. Але перевірка показує, що жодне з цих чисел не задовольняє рівняння.

Випадок 2. $y \leq -1$. Зробимо заміну $y = -t$, $t \geq 1$.

Тоді ліва частина рівняння набуває вигляду $(x+t)\sqrt{x-2t}$. Звідси можемо отримати рівність

$$x-2t = \frac{\sqrt[3]{(13x+8)^2}}{(x+t)^2}.$$

Для правої частини отриманої рівності можемо отримати аналогічні оцінки згори та знизу:

$$0 < \frac{\sqrt[3]{(13x+8)^2}}{(x+t)^2} < \sqrt[3]{\frac{13^2(x+1)^2}{(x+1)^6}} = \sqrt[3]{\frac{169}{(x+1)^4}} \leq \sqrt[3]{\frac{169}{16}} < \sqrt[3]{11} < 3.$$

Отже, $0 < x-2t < 3$, а тому $x-2t$ може набувати значень лише 1 або 2.

а) Нехай $x-2t=1$, звідки $x=2t+1$. Тоді, якщо виконати підстановку, рівняння набуває вигляду $3t+1 = \sqrt[3]{26t+21}$, тобто $(3t+1)^3 = 26t+21$.

Звідси $27t^3 + 27t^2 = 17t + 20$. Але $27t^3 + 27t^2 \geq 27t + 27 > 17t + 20$. Отже рівняння розв'язків не має.

б) Нехай $x-2t=2$, звідки $x=2t+2$. Тоді, якщо виконати підстановку, рівняння набуває вигляду $(3t+2)\sqrt{2} = \sqrt[3]{26t+34}$, тобто $(3t+2)^3 \cdot 2\sqrt{2} = 26t+34$.

Очевидно, що при будь-якому натуральному t права частина рівняння – ціле число, а ліва – ірраціональне. Тому, рівняння розв'язків не має.

Відповідь: (9;8).

У цій задачі метод локалізації дозволив звести розв'язування рівняння з двома невідомими до розгляду чотирьох рівнянь з одним невідомим, що в свою чергу потребувало суто технічної роботи.

Задача 3 (XIX Всеукраїнський ТЮМ, 2016, автор – М. Мороз) Розв'яжіть у цілих числах x і y рівняння

$$\left[\frac{x^2 - y^3}{x + y^2} \right] = 1 + x - y$$

(тут $[a]$ – ціла частина числа a , тобто найбільше ціле число, що не перевищує a).

Розв'язання. Розпишемо ліву частину рівняння за означенням цілої частини числа та виконаємо тотожні перетворення:

$$1+x-y \leq \frac{x^2-y^3}{x+y^2} < 2+x-y;$$

$$1 \leq \frac{x^2-y^3}{x+y^2} - x + y < 2;$$

$$1 \leq \frac{xy(1-y)}{x+y^2} < 2.$$

З останньої подвійної нерівності маємо, що $x, y \neq 0$, $y \neq 1$ та $x \neq -y$.

При всіх цілих значеннях y , що задовольняють накладені щойно умови, маємо, що $y(1-y) < 0$. Оскільки сам дріб з останньої подвійної нерівності є додатним, то серед чисел x та $x+y^2$ одне від'ємне та одне додатне. А оскільки $x < x+y^2$, то $x < 0$, а $x+y^2 > 0$.

З нерівностей $\frac{xy(1-y)}{x+y^2} < 2$ та $x+y^2 > 0$ випливає, що $xy(1-y) < 2x+2y^2$.

Звідси $x(-y^2+y-2) < 2y^2$. Оскільки $(-y^2+y-2) < 0$ при довільному значенні y (внаслідок від'ємності дискримінанта квадратного тричлена), то

$$x > \frac{2y^2}{-y^2+y-2}.$$

Дослідивши праву частину нерівності за допомогою похідної, знаходимо, що $\min\left(\frac{2y^2}{-y^2+y-2}\right) = -\frac{16}{7}$. А оскільки x є цілим від'ємним числом, то x може набувати лише значень -1 та -2 . Маємо два випадки.

1) Нехай $x = -2$. Тоді виконаємо відповідну підстановку та одержимо

$$1 \leq \frac{2y^2-2y}{y^2-2} < 2.$$

Звідси одержуємо подвійну нерівність $y^2-2 \leq 2y^2-2y < 2y^2-4$, яка рівносильна наступній системі:

$$\begin{cases} y^2 - 2 \leq 2y^2 - 2y; \\ 2y^2 - 2y < 2y^2 - 4; \end{cases} \begin{cases} y^2 - 2y + 2 \geq 0; \\ y > 2; \end{cases} \begin{cases} (y-1)^2 + 1 \geq 0; \\ y > 2. \end{cases}$$

Бачимо, що перша нерівність системи виконується для довільного цілого значення y , а тому з другої нерівності робимо висновок, що розв'язком системи в цілих числах є множина всіх цілих y таких, що $y \geq 3$.

2) Нехай $x = -1$. Тоді виконаємо відповідну підстановку та одержимо

$$1 \leq \frac{y^2 - y}{y^2 - 1} < 2.$$

Звідси одержуємо подвійну нерівність $y^2 - 1 \leq y^2 - y < 2y^2 - 2$, яка рівносильна наступній системі:

$$\begin{cases} y^2 - 1 \leq y^2 - y; \\ y^2 - y < 2y^2 - 2; \end{cases} \begin{cases} y \leq 1; \\ y^2 + y - 2 > 0. \end{cases}$$

Але оскільки $y \neq 1$ і $y \neq 0$, що було визначена на початку, то $y \leq -1$. Розв'язком другої нерівності є множина $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. А тому розв'язком цієї системи в цілих числах буде множина всіх цілих y таких, що $y \leq -3$.

Отже, дане рівняння має нескінченну кількість цілочисельних розв'язків: при $x = -2$ маємо, що $y \geq 3$, а при $x = -1$ відповідно $y \leq -1$.

У цій задачі нам вдалося локалізувати можливі значення для невідомої x , що дозволило виконати перебір всього лише двох випадків, а сама задача звелася до відшукування цілочисельних розв'язків двох типових систем нерівностей.

Ще одне рівняння в цілих числах, яке пропонувалося вже у Фінальному бої XIX ТЮМу, буде розміщено далі разом з іншими задачами, аби ви мали змогу розв'язати його самостійно.

4. Задачі для самостійного розв'язування

Наступні задачі пропонувалися в різні роки на різних математичних змаганнях. Кожна з них має свій авторський розв'язок, проте кожна з них можна розв'язати також і методом локалізації. Цікаво та корисно спробувати отримати

принаймні по два розв'язання цих рівнянь, одне з яких з яких опиратиметься на метод локалізації, а інше – ні. До кожної задачі далі буде наведено вказівки та відповіді.

Задача 4 (Соціалістична Федеративна Республіка Югославія, 1974). Розв'язати рівняння $x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2$ в цілих числах.

Задача 5 (15-та Всесоюзна олімпіада, 1981, Алма-Ата). Розв'яжіть рівняння $x^3 - y^3 = xy + 61$ в натуральних числах.

Задача 6 (Всеросійська олімпіада з математики, 1997, 10 клас, автор – М. Сонкин). Розв'яжіть в цілих числах рівняння

$$(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y.$$

Задача 7 (6-й Всеукраїнський турнір математичних боїв імені І. І. Ляшка, 2011, молодша ліга) Розв'яжіть у цілих числах рівняння $9m^2 + 3n = n^2 + 8$.

Задача 8 (XIX Всеукраїнський ТЮМ, Фінальний бій, 2016, автор – М. Мороз) Знайдіть усі такі пари цілих чисел x і y , для яких

$$x^3 - 1 = y^3 + y^2 + 5xy + x + \sqrt{5x+1} + \sqrt{3y+1}.$$

5. Вказівки та відповіді

Задача 4. Вказівка. Легко отримати розв'язки $(0;0)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$. В силу симетричності рівняння припустіть, що $|x| \leq |y|$, оцініть згори $|x|$ та отримайте, що інших розв'язків рівняння не має.

Задача 5. Вказівка: оцініть значення різниці $x - y$. **Відповідь:** $(5;6)$.

Задача 6. Вказівка: оцініть модуль $|x - y|$. **Відповідь:** $(\pm 1;0)$, $(\pm 4;3)$, $(\pm 4;5)$.

Задача 7. Вказівка: оцініть згори та знизу значення виразу $n - 3m$. **Відповідь:** $m = \pm 2$, $n = -4$ або $n = 7$.

Задача 8. Вказівка: Оцініть згори та знизу значення різниці $x - y$. **Відповідь:** $(3;1)$, $(7;5)$.

6. Дослідницький проект

Допитливий читач може узагальнити задачу3, а саме дослідити множину цілочисельних розв'язків рівняння $\left[\frac{x^2 - y^3}{x + y^2} \right] = a + x - y$ залежно від дійсного параметра a .

Отримані результати можуть бути представлені як дослідницька доповідь на учнівській конференції чи як науково-дослідницька робота в Малій Академії Наук.

Література

1. Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи всесоюзных математических олимпиад – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – (Б-ка мат. кружка; вып. 18). – 288с.
2. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. — М.: МЦНМО, 2007. — 472 с.
3. Зарубежные математические олимпиады / Конягин С. В., Тоноян Г. А., Шарыгин И. Ф. и др.; Под ред. И. Н. Сергеева. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – (Б-ка мат. кружка). – 416с.
4. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2010/11 навч. рік : навч.-метод посіб. / А. В. Анікушин, А. Є. Данилова, Г. В. Крюкова та ін.; за ред. Б. В. Рубльова. – Х.: Гімназія, 2013. – 368с.: іл.
5. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2011/12 навч. рік : навч.-метод посіб. / А. В. Анікушин, А. Є. Данилова, Г. В. Крюкова та ін.; за ред. Б. В. Рубльова. – Х.: Гімназія, 2013. – 416с.: іл.