Фінал

1. Знайдіть кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$

у залежності від значення параметра $a \in \mathbb{R}$.

2. Зі ста дійсних чисел потрібно вибрати два так, щоб їхнє середнє арифметичне було не менше за середнє арифметичне всього набору. Доведіть, що це завжди можна зробити принаймні 99 способами.

3. За допомогою циркуля та лінійки відновіть трикутник за серединами двох сторін і точкою всередині трикутника, з якої кожну сторону видно під однаковим кутом.

4. Нехай x, y, z – числа з відрізка $[1, 4]$. Доведіть, що

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \geq \frac{22}{15}.$$

5. У нетупокутному трикутнику ABC з $\angle A = 60^\circ$ проведено медіану BM, висоту CH та бісектрису AL так, що вони утворюють трикутник, подібний трикутнику ABC. Знайдіть кути B та C даного трикутника.

6. Знайдіть усі строго зростаючі функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задовольняють рівняння

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) + f\big(f(y)\big)$$

для довільних $x, y \in \mathbb{R}$.