Задача

Найти все строго возрастающие функции $f: R \to R$ такие, что для всех $x, y \in R$,будет

$$f\big(x+f(y)\big) = f(x) + f(f(y)).$$

Решение

Подстановка $x = 0$ дает $f(0) = 0$.

Шаг 1. $f(nf(x) + mf(y)) = nf\big(f(x)\big) + mf\big(f(y)\big)$.

Имеем

$f\big(x+2f(y)\big) = f\big(x+f(y)+f(y)\big) = f\big(x+f(y)\big) + f(f(y)) = f(x) + 2f(f(y))$,

откуда по индукции получим для всех $n \in \mathbf{N}$.

$f\big(x+nf(y)\big) = f(x) + nf(f(y))$.

В частности, $f\big(nf(y)\big) = nf\big(f(y)\big)$

Подставив в условие $x = -f(y)$, получим $f\big(-f(y)\big) = f(f(y))$, откуда $f(nf(x)) = nf(x)$ для всех целых n. Также для всех $n, m \in \mathbf{Z}$ будет

$f\big(nf(x) + mf(y)\big) = f\big(nf(x)\big) + mf\big(f(y)\big) = nf\big(f(x)\big) + mf\big(f(y)\big)$.

Шаг 2.$f(f(x)) = af(x)$

Рассмотрим значения $f(y)$ для $y > 0$. Из возрастания f имеем $f(y) > 0$, $y > 0$.

Возьмем произвольное $z_1 > 0$, обозначим $f(f(z_1))/f(z_1) = a$, покажем, что для всех x будет $f(f(x)) = af(x)$.

Пусть для некоторого $f(f(z_0)) > af(z_0)$. Возьмем n_1 такое, что

$$n_1(f\big(f(z_0)\big) - af(z_0)) > f(f(z_1)).$$

и выберем k_1 так, что

$$k_1 f(z_1) \le n_1 f(z_0) < (k_1+1) f(z_1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} f((k_1+1)f(z_1)) &= (k_1+1)f(f(z_1)) = a(k_1+1)f(z_1) \le an_1 f(z_0) + af(z_1) \\ &< n_1\, f\big(f(z_0)\big) - f\big(f(z_1)\big) + af(z_1) = n_1\, f\big(f(z_0)\big) = f(n_1 f(z_0)), \end{aligned}$$

что противоречит возрастанию f.

“Поменяв местами” $f(z_0)$ и $f(z_1)$, придем к противоречию в случае $f\big(f(z_0)\big) < af(z_0)$.

Шаг 3. Для каждого $c > 0$ найдется $y > 0$ такой, что $f(y) < c$

Допустим, это не так, и $f(y) \ge c_0 > 0$ для $y > 0$. Из доказанного выше

$f\big(nf(x) + mf(y)\big) = nf\big(f(x)\big) + mf\big(f(y)\big) = a(nf(x) + mf(y))$, получаем:

$$\text{если } nf(x) + mf(y) > 0, \text{ то } nf(x) + mf(y) \ge c_0/a.$$

Отсюда следует, что все значения $f(x)$ соизмеримы, для некоторого d все $f(x) = kd$, $k \in \mathbf{Z}$**,** эта дискретность возможных значений противоречит строгому возрастанию f.

Шаг 4. Вернемся к решению задачи.

Пусть $f(x_0) = bx_0$, $b > a$ (ниже аналогично рассматривается случай $b < a$). Возьмем z_0 такое, что $f(z_0) < (b-a)x_0/a$.

Возьмем n_0 такое, что $n_0 f(z_0) \le x_0 < (n_0+1) f(z_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} f((n_0+1)f(z_0)) &= (n_0+1)f\big(f(z_0)\big) = (n_0+1)af(z_0) = n_0 af(z_0) + af(z_0) \\ &< ax_0 + af(z_0) < ax_0 + (b-a)x_0 = bx_0 = f(x_0), \end{aligned}$$

что противоречит возрастанию f.

Пусть $f(x_0) = bx_0$, $b < a$. Возьмем z_0 такое, что $f(z_0) < (a-b)x_0/a$.

Возьмем n_0 такое, что $n_0 f(z_0) \le x_0 < (n_0+1) f(z_0)$. Тогда

$$f(n_0 f(z_0)) = n_0 f\big(f(z_0)\big) = n_0 af(z_0) = (n_0+1)af(z_0) - af(z_0) > ax_0 - (a-b)x_0 = bx_0 = f(x_0)$$

что противоречит возрастанию f.

Получаем возможное решение $f(x) = ax, a > 0$, проверка его подтверждает.

Ответ: $f(x) = ax, a > 0$.

Радченко В.Н., январь 2015