

# Задача

В місті проживають  $3n$  мешканців. Будь-які два мешканці або знайомі або мають спільного знайомого. Довести, що можна вибрати групу з  $n$  мешканців таку, що кожен з інших  $2n$  мешканців має хоча б одного знайомого серед вибраних  $n$ .

## Розв'язання

Нехай якийсь мешканець  $A$  має не більше  $n$  знайомих. Тоді група з усіх цих знайомих (без  $A$ ) задовольняє твердженню задачі.

Нехай кожен мешканець має більше  $n$  знайомих (тобто, більше третини від загальної кількості). Будемо навмання з повертанням обирати мешканців  $n$  раз, так ми отримаємо не більше  $n$  різних мешканців. При такому виборі випадкової групи ймовірність того, що конкретний мешканець  $B$  не буде мати там жодного знайомого, не перевищує  $\left(\frac{2n-2}{3n}\right)^n$ . По всіх мешканцям разом сума ймовірностей не перевищує  $3n\left(\frac{2n-2}{3n}\right)^n$ .

Легко перевірити, що  $3n\left(\frac{2n-2}{3n}\right)^n < 1$ , звідки впливає існування потрібної вибірки.