

Фінал

1. Чи існує строго монотонна функція f , що визначена на множині всіх дійсних чисел, приймає дійсні значення і для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ задовольняє нерівність

$$f(x + f(y)) \geq f(xf(y)) \quad ?$$

2. Дано гострокутний трикутник ABC , AH – його висота, AL – бісектриса, точка T – точка дотику зовнівписаного кола до сторони BC , ω – вписане коло трикутника ABC . Нехай промені AH , AL та AT вперше перетинають ω в точках P , Q та R відповідно.

За допомогою циркуля та лінійки відновіть трикутник ABC за точками P , Q та R .

3. Знайдіть всі натуральні m і n , при яких $3^m + 7^n$ є точним квадратом.

4. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ – дійсні числа такі, що для всіх $k = 1, 2, \dots, 2019$

$$a_1 a_2 \dots a_k \geq 1.$$

Доведіть нерівність

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_{2019}}{2019} > \frac{13}{2}.$$

5. Розглядаються всілякі добутки вигляду $a_1 \dots a_n$, де $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ – різні натуральні числа, які не перевищують 2019, $n \geq 1$. Доведіть, що сума

$$\sum_{1 \leq n \leq 2019} \left(\sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 2019} \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \right)$$

є цілим числом.

6. В місті проживають $3n$ мешканців. Відомо, що будь-які два мешканці мають спільного знайомого. Доведіть, що можна вибрати групу з n мешканців таку, що кожен з інших $2n$ мешканців має хоча б одного знайомого серед вибраних n .