

I ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

Завдання відбірних етапів

1. Деяка фірма закупила у іншої, подібної їй фірми, N одиниць товару на суму $3P$ тисяч доларів. Якби вона закупила ще додатково 10 одиниць товару, то нова угода склала б 4000\$, що дало б економію 1600\$ на кожній дюжині одиниць по відношенню до виконаної угоди. Знайдіть N і P серед цілих чисел.

2. Функція $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє співвідношення

$$\psi(x+2) = 1 + \sqrt{2\psi(x) - \psi^2(x)} \text{ для всіх дійсних } x.$$

Які властивості вона має? Наведіть приклади хоча б однієї такої, відмінної від константи, функції.

3. Побудуйте відмінну від константи функцію, періодами якої є будь-які три наперед задані числа.

4. В n -вимірному просторі з точки виходять $n+1$ променів, які попарно утворюють кут φ . Знайдіть цей кут.

5. Висоти трикутної піраміди перетинаються в одній точці. Доведіть, що всі плоскі кути при будь-якій вершині області або гострі, або прямі, або тупі.

6. Дано натуральні числа n та k , $k < n$. Розглянемо $P_{n,k}$ — кількість перестановок множини $\{1, 2, \dots, n\}$, при яких кожний елемент i переміщується на менш ніж на k вліво чи вправо (тобто для i та його місця в перестановці n_i виконується нерівність $|i - n_i| \leq k$). Для різних значень n та k отримати якомога більш точні оцінки зверху та знизу для величини $P_{n,k}$. Вивчіть властивості цієї величини.

7. Дано натуральне число $n > 3$. На площині розглядаються опуклі n -кутники F_1 та F_2 такі, що на кожній стороні F_1 лежить по одній вершині F_2 , жодні дві вершини F_1 та F_2 не співпадають.

Для кожного n визначте, у яких межах знаходиться відношення площ многокутників F_1 та F_2 .

Для кожного n визначте, у яких межах знаходиться відношення площ многокутників F_1 та F_2 , якщо F_1 правильний n кутник.

Визначте множину значень даної величини для інших частинних випадків вигляду F_1 .

8. Одна з сторін трикутника поділена в відношенні $p:q$, а друга $m:n:k$. Одержані точки ділення сторін з'єднані з протилежними вершинами трикутника прямими. Знайдіть відношення площі даного трикутника до площі чотирикутника, утвореного трьома такими прямими і однією з сторін трикутника.

9. Доведіть, що для будь-якої внутрішньої точки трикутника сума квадратів відстаней від неї до сторін трикутника не менша величини $\frac{4S^2}{9R^2}$.

10. Дано коло радіуса R . Знайдіть відношення найбільшої площі описаного чотирикутника до найменшої площі вписаного.

11. Розв'яжіть рівняння $4x^2 - 6x^4 + \frac{\left(8x^6 - 2x^2 - \frac{1}{x^2}\right)}{16} = 0$.

12. Розглянемо послідовність чисел, складену з перших цифр послідовності степенів числа 3.

А) Чи зустрінесться в цій послідовності цифра 7?

Б) Яка цифра найчастіше зустрічається в цій послідовності?

13. В двогранному дзеркальному куті розміщена свічка і людина. Скільки відображень може бачити людина?

14. Чи існує неперервна, але недиференційована в точці x_0 функція:

А) усі степені якої в цій точці є диференційовні функції;

Б) усі степені якої від i до k не мають похідної в точці x_0 , а степені більші k диференційовні в точці x_0 ?

15. Прямокутний трикутник при обертанні навколо великого катета утворює конус об'ємом 100π . Обчисліть довжину шляху, який проходить кожна вершина трикутника при обертанні на 180° навколо точки перетину його бісектрис, якщо сума діаметрів вписаного в трикутник і описаного навколо нього кіл дорівнює 17.

Міністерство освіти України
Інститут змісту та методів навчання
Управління освіти Сумської обласної державної адміністрації
Сумський державний педагогічний інститут ім. А.С.Макаренка
Загальноосвітній навчально-виховний комплекс №10 м. Суми

Другий Всеукраїнський турнір юних математиків
Завдання відбіркового етапу

1. "**Циліндр**". Всередині прямого кругового циліндра з радіусом основи R розташували k ($k \geq 3$) однакових куль, кожна з яких дотикається до бічної поверхні та до нижньої основи даного циліндра і, крім того, – **рівно до двох** інших куль. Після цього всередині циліндра розташували ще одну таку ж саму кулю таким чином, що вона дотикається до верхньої основи циліндра і **до всіх інших** куль. Знайдіть об'єм $V(R; k)$ циліндра.

2. "**Тетраedr**". Чи вірно, що коли всі грані тетраедра мають однакову площу, то вони є рівними один одному трикутниками?

3. "**Прості числа**". Нехай $P_1 < P_2 < P_3 < \dots$ – послідовність всіх натуральних простих чисел, яких записано у порядку зростання. Доведіть, що при всіх натуральних $k \geq 3$ виконується нерівність $P_{k-1} + P_{k-2} \geq P_k$.

4. "**Критерій збіжності**". Нехай $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – деяка послідовність невід'ємних дійсних чисел. Установіть **критерій** збіжності числової послідовності

$$x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \dots + \sqrt{a_n}}}}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

5. "**Інтеграл**". Нехай f – **фіксована** неперервна на всій числовій осі функція, яка є періодичною з періодом $T = 2$, причому відомо, що функція f монотонно спадає на сегменті $[0; 1]$, монотонно зростає на сегменті $[1; 2]$ та при всіх $x \in \mathbf{R}$ задовольняє рівність

$$f(x) = f(2 - x). \text{ Знайдіть найменше значення функції } F: \alpha \in \mathbf{R} \mapsto \int_0^2 f(x)f(\alpha + x)dx.$$

6. "**Нерівність Коші-Буняковського**". Доведіть, що для довільних додатних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ при будь-якому $\alpha > 0$ буде мати місце така нерівність:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n (a_k^{2\alpha} + b_k^{2\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2 b_k^2}{(a_k^{2\alpha} + b_k^{2\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}} \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

7. "**Графік функції**". Дослідіть на періодичність функцію $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ у кожному з таких трьох випадків:

- а) графік функції f є симетричним відносно двох прямих, котрі паралельні до осі ординат;
- б) графік функції f є симетричним відносно деякої точки координатної площини та відносно прямої, котра паралельна до осі ординат;
- в) графік функції f є симетричним відносно двох точок координатної площини.

8. "**Числові набори**". Дано n таких дійсних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, що

$\max_{1 \leq k \leq n} x_k - \min_{1 \leq k \leq n} x_k = 1$. Нехай $y_k = \frac{x_1 + \dots + x_k}{k}$, $1 \leq k \leq n$. Яке найбільше та яке найменше значення може за таких умов приймати різниця між найбільшим та найменшим з чисел $y_1, y_2, \dots, y_n$?

9. "**Подільність добутку**". Дослідіть питання щодо подільності добутку декількох послідовних натуральних чисел на їх суму.

10. "**Біноміальні коефіцієнти**". Для яких натуральних чисел n всі біноміальні коефіцієнти C_n^k , $0 \leq k \leq n$, є непарними числами?

11. "**Многочлен**". Чи існує такий многочлен Q , не всі коефіцієнти якого є цілими числами, що для деякого **нецілого** раціонального числа a многочлен $P(x) \equiv (x - a)Q(x)$ матиме тільки цілочисельні коефіцієнти?

12. "**Функціональне співвідношення**". Нехай $\mathbf{Z}^+$ – множина всіх цілих невід'ємних чисел. Чи існує така функція $f: \mathbf{Z}^+ \rightarrow \mathbf{Z}^+$, що при всіх $n \in \mathbf{Z}^+$ виконується рівність $f(f(n)) = n + 1999$?

13. "**Визначник**". Нехай a_{ij} – кількість спільних натуральних дільників натуральних чисел

$$i \text{ та } j. \text{ Знайдіть визначник матриці } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

14. "**Діофантове рівняння**". Розв'яжіть у цілих числах діофантове рівняння $6x^2 = 2y^2 + z^2$. Дослідіть діофантові рівняння вигляду $Ax^2 = By^2 + Cz^2$ ($A, B, C \in \mathbf{Z}$).

15. "**Оцінювання суми**". Нехай $n \geq 3$ – натуральне число. Доведіть, що справджується нерівність

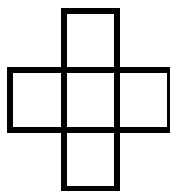
$$\sum_{\substack{i+j+k=n \\ \{i,j,k\} \subset \mathbf{N}}} \frac{1}{(ijk)^2} \leq \frac{16}{n^2}.$$

16. "**Точки всередині кола**". Всередині кола дано три точки, які не належать одній прямій. За один крок дозволяється **замінити** одну з точок на симетричну їй відносно прямої, що містить дві інші точки. Чи завжди можна за скінченну кількість зазначених кроків досягти того, щоб всі три точки опинилися поза колом?

17. "**Нескінченно диференційовні функції**". Знайдіть всі функції $F \in C^\infty(\mathbf{R})$, котрі мають таку властивість: для будь-якого $x \in \mathbf{R}$ існує таке натуральне число $n(x)$, що у точці x похідна функції F порядку $n(x)$ дорівнює нулю.

18. "**Побудова дотичної**". Всередині гострого кута розташовано коло. Дослідіть можливість побудови за допомогою **тільки циркуля та лінійки** такої дотичної до даного кола, що точка дотику ділитиме **навпіл** відрізок дотичної, який відтинається сторонами кута.

19. "**Пентаміно**". Дана шахівниця розміру 9×9 . Знайдіть **найбільше** натуральне число k , яке матиме таку властивість: якщо із шахівниці вилучити **довільним чином** k клітинок, то з решти можна ще вирізати принаймні одну **п'ятиклітинкову** фігурку (X -пентаміно), котру зображено на малюнку.



Які узагальнення для такої задачі ви можете запропонувати?



Міністерство освіти і науки України
Науково-методичний центр середньої освіти

Третій Всеукраїнський турнір юних математиків

Завдання відбіркового етапу

1. “**Гострі кути**”. Числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ задовольняють умову $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.

Що тоді можна стверджувати щодо чисел $X = \sin^n \alpha + \sin^n \beta$ та $Y = \sin^n \gamma + \sin^n \delta$ ($n \in \mathbf{N}$)?

2. “**Цікаві точні квадрати**”. Доведіть, що всі члени нескінченної числової послідовності 49, 4489, 444889, 44448889, ... (кожне наступне число утворюється вставленням 48 до середини попереднього числа) є точними квадратами. Спробуйте дослідити описаний числовий ефект у більш загальному вигляді (у тому числі – розглянути для $k \in \mathbf{N}$ аналогічно влаштовані послідовності, всі члени яких є k -ми степенями натуральних чисел).

3. “**Рівняння в цілих числах**”. Для фіксованих чисел $k \in \mathbf{Z}$ і $n \in \mathbf{N}$ дослідіть діофантове рівняння $x_1 + x_2 + \dots + x_n = kx_1x_2 \cdot \dots \cdot x_n$.

4. “**Рекурентне співвідношення**”. Для числової послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ при всіх $n \in \mathbf{N}$ справджується рівність $a_n a_{n+3} = a_{n+1} a_{n+2} + a_0$. Дослідіть властивості такої послідовності в залежності від її перших чотирьох членів a_0, a_1, a_2, a_3 .

5. “**Числова таблиця**”. Для яких $k \in \mathbf{N}$ можна стверджувати, що для довільного розташування чисел $1, 2, 3, \dots, n^2$ у клітинках таблиці розміру $n \times n$ знайдуться дві такі сусідні клітинки (тобто, клітинки, котрі мають спільну сторону), що різниця чисел, яких записано до них, більша за k ?

6. “**Ізоморфні числові поля**”. Нехай m і n – фіксовані натуральні числа, які не є точними квадратами. Установіть критерій існування такого взаємно однозначного відображення φ множини $A(m) = \{a + b\sqrt{m} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ на множину $A(n) = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$, щоб для всіх $x, y \in A(m)$ одночасно виконувалися дві рівності: а) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$; б) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.

7. “**Розбиття натурального ряду**”. Доведіть, що при довільному розбитті множини $\mathbf{N}$ всіх натуральних чисел на k класів (k – довільне натуральне число) для будь-якого $p \in \mathbf{N}$ принаймні один з класів містить зростаючу арифметичну прогресію довжини p . Чи справджуватиметься таке твердження, якщо вимагати наявності в одному з класів нескінченної зростаючої арифметичної прогресії? Дослідіть аналогічні питання для геометричних прогресій.

8. “**Фальшиві монети**”. В наявності є m справжніх та n фальшивих монет ($n < m$) і шалькові терези без гирьок. Всі фальшиві монети важать однаково, проте невідомо – менше чи більше за справжню монету. Знайдіть найменшу можливу кількість зважувань, які необхідні для визначення всіх фальшивих монет.

9. “**Періодична функція**”. Нехай f – неперервна на всій числовій осі періодична функція. Доведіть, що для кожного $\alpha \in \mathbf{R}$ існуватиме корінь рівняння

$f(x) = f(x + \alpha)$. А для яких α можна гарантувати існування розв'язків у цього ж рівняння, якщо неперервна функція f визначена тільки на сегменті $[a; b]$ і приймає на його кінцях однакові значення?

10. “**Нерівність**”. Нехай $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – такі послідовності додатних чисел, що для будь-якої непорожньої множини $P \subseteq \mathbb{N}$ матимемо, що $\sum_{n \in P} b_n \geq \left(\sum_{n \in P} a_n \right)^{1999}$. Доведіть, що для довільного числа $m \in \mathbb{N}$ справджується нерівність $\sum_{n=1}^m a_n b_n \geq \left(\sum_{n=1}^m a_n^2 \right)^{1000}$.

Запропонуйте для даної задачі можливі узагальнення.

11. “**Спрямлення ламаної, що нескінченно закручується**”. Коло з центром у точці O розділено точками $A_1, A_2, \dots, A_n$ на n рівних частин (точки перераховано послідовно за годинниковою стрілкою) та побудовано промені $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$. Кут A_2OA_3 розділено променями на два рівних кута з вершиною у точці O , кут A_3OA_4 розділено на три рівних кута, і так далі, нарешті, кут A_nOA_1 розділено на n рівних кутів з вершиною у точці O . Відмінна від O точка B_0 , яка належить променю OA_1 , сполучається відрізком зі своєю ортогональною проекцією B_1 на сусідній (за годинниковою стрілкою) з OA_1 промінь, точка B_1 сполучається відрізком зі своєю ортогональною проекцією B_2 на наступний (за годинниковою стрілкою) промінь і т. д. В результаті такого процесу отримується ламана $B_0B_1B_2B_3\dots$, що нескінченно “закручується”. Розгляньте питання щодо надання одержаній у такий спосіб ламаній числового значення “довжини” $L(n)$ та дослідіть величину $L(n)$ в залежності від n .

12. “**Ламана з самоперетинами**”. Дослідіть, для яких натуральних чисел n існує замкнена n -ланцюгова ламана, яка перетинає кожен зі своїх ланок тільки один раз (всі точки самоперетину ламаної повинні відрізнятися від її вершин і будь-які три ланки цієї ламаної не повинні мати спільних точок). Запропонуйте загальний спосіб побудови такої ламаної для припустимих значень n та її “аналітичне” завдання.

13. “**Криволінійна зірочка**”. Всередині правильного n -кутника M зі стороною a розташовано n рівних кіл таким чином, що кожне дотикається до двох суміжних сторін многокутника M та ще до двох інших кіл. Всередині утвореної “зірочки”, котра обмежена дугами, знов будується n рівних кіл так, щоб кожне дотикалося до двох сусідніх кіл, побудованих на попередньому кроці, та ще до двох щойно побудованих кіл. Такий процес триватиме k кроків. Знайдіть площу $S_n(k)$ “зірочки”, яка утворюється в центрі многокутника M . Розгляньте просторовий аналог даної задачі.

14. “**Паркети з п'ятикутників**”. Чи можливо “розрізати” площину на опуклі п'ятикутники, кожного з яких можна вписати до деякого кола? Розгляньте аналогічні питання щодо існування “розрізування” площини на опуклі п'ятикутники, до кожного з яких можна вписати коло, та “розрізування” на опуклі п'ятикутники, кожен з яких є вписано-описаним (таким, що його можна одночасно і вписати до кола, і описати навколо деякого кола).

15. “**Многогранник**”. Нехай γ_m ($m \geq 3$) – кількість граней опуклого многогранника, які є m -кутниками. Охарактеризуйте числові набори $(\gamma_3; \gamma_4; \gamma_5; \dots)$ (для кожного многогранника такий набір є, звичайно, скінченним).

Міністерство освіти і науки України
Науково-методичний центр середньої освіти

IV ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

Завдання відбірних етапів

1. "Нерівність з добутком чисел, що дорівнює одиниці". Доведіть, що коли $a > 0, b > 0, c > 0$ — дійсні числа і $abc = 1$, то $\forall n \in \mathbb{N}$ справджується

нерівність
$$\frac{1}{a^3 + b^3 + n} + \frac{1}{b^3 + c^3 + n} + \frac{1}{c^3 + a^3 + n} \leq \frac{1}{n + 2}.$$

2. "Раціональні наближення числа $\sqrt{2}$ ". Дано дві послідовності (a_n) і (b_n) , що задовольняють співвідношення

$$a_1 = b_1 = 1, a_{n+1} = a_n + b_n, b_{n+1} = a_n + a_{n+1}, n \geq 1.$$

Доведіть, що відношення $\frac{b_n}{a_n}$ є послідовними наближеннями числа $\sqrt{2}$.

3. "Діофантове рівняння". Знайдіть як можна більше розв'язків у цілих числах рівняння:

a) $z^3 = x^2 - 2y^2$;

b) $Az^3 = Bx^2 + Cy^2$, де A, B, C — цілі числа.

4. "Примарні числа". Знайдіть усі набори послідовних натуральних чисел, що складаються не менше ніж із трьох чисел, кожне з яких є примарним. (Примарним називається число, що є степенем простого числа з цілим невід'ємним показником).

5. "Тригонометричні перетворення". Яке з чисел є більшим:

$$\frac{2\sin 2^\circ + 4\sin 4^\circ + \dots + 178\sin 178^\circ}{90} \text{ чи } \operatorname{ctg} 1^\circ?$$

6. "Многочлен і числа Фібоначчі". Розглянемо нескінченний добуток

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)\dots\left(1-x^{a_i}\right)\left(1-x^{a_{i+1}}\right)\left(1-x^{a_{i+2}}\right)\dots,$$

де показники степенів (a_i) є послідовними числами Фібоначчі:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{i+2} = a_i + a_{i+1} \ (i = 1, 2, \dots).$$

Доведіть, що коли у цьому добутку перемножити будь-яку кількість послідовних дужок, то дістанемо многочлен, коефіцієнти якого набувають лише трьох значень: 0, 1 або (-1). Запропонуйте ще деякі подібні факти.

7. "Два чотирикутники". Нехай $ABCD$ — чотирикутник, площа якого є найбільшою серед чотирикутників із заданими сторонами a, b, c, d , і нехай $PQRS$ — вписаний в $ABCD$ чотирикутник з найменшим периметром. Знайти цей периметр.

8. "Опуклий шестикутник". Доведіть, що в довільному опуклому шестикутнику існує діагональ, яка відтинає від нього трикутник, площа якого не перевищує $\frac{1}{6}$ площі шестикутника.

Які властивості має опуклий шестикутник, кожна діагональ якого відтинає від нього трикутник, площа якого не менше за $\frac{1}{6}$ площі шестикутника?

9. "Паралельні площини". Дано опукле тіло в просторі. Доведіть, що на його поверхні можна відмітити чотири точки так, щоб дотична площина до поверхні в будь-якій з цих чотирьох точок була паралельною до площини, що проходить через три інші.

10. "Геометричні нерівності". Дано трикутник ABC і точки D, E, F , які є точками дотику вписаного кола до сторін трикутника.

1). Доведіть, що $\frac{2pr}{R} \leq DE + EF + DF \leq p$ (p — напівпериметр, r і R — відповідно радіус вписаного і описаного кола $\triangle ABC$).

2). З'ясуйте, коли досягаються рівності.

11. "Тетраedr". В тетраедрі $ABCD$ точка E є проекцією точки D на площину (ABC) . Доведіть, що наступні твердження є еквівалентними:

а). $C = E$ або $CE \parallel AB$;

б). Для кожної точки M , яка належить відрізку CD , виконується наступна рівність

$$S_{\triangle ABM}^2 = \frac{CM^2}{CD^2} \cdot S_{\triangle ABD}^2 + \left(1 - \frac{CM^2}{CD^2}\right) S_{\triangle ABC}^2,$$

де $S_{\triangle XYZ}$ означає площу трикутника XYZ .

12. "Комплексні числа". Нехай дійсне число $a \geq 1$ і комплексне число z є такими, що $|z + a| \leq a$ і $|z^2 + a| \leq a$. Доведіть, що $|z| \leq a$.

13. "Послідовність і ціла частина числа". Знайдіть усі дійсні числа $a > 1$, для яких у послідовності $(b_n) = \left(\left[a^n \right] \right)$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$ є нескінченно багато: а) парних чисел; б) непарних чисел. Запропонуйте можливі узагальнення цієї задачі. ($[x]$ — ціла частина дійсного числа x).

14. "Інтеграл". Нехай a, b — додатні цілі числа такі, що $a + b = 1$ і $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ — зростаюча функція така, що для всіх

$x \geq 0$: $\int_0^x f(t) dt = \int_0^{ax} f(t) dt + \int_0^{bx} f(t) dt$. Доведіть, що $f(x) = 0$, для всіх $x \geq 0$.

15. "Періодичні функції". 1). Нехай $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — періодичні функції такі, що функція $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має скінченну границю в плюс нескінченно віддаленій точці. Доведіть, що f є сталою.

2). Нехай a_1, a_2, a_3 — дійсні числа і $a_1 \cos a_1 x + a_2 \cos a_2 x + a_3 \cos a_3 x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Доведіть, що $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 0$.

16. "Принцип крайнього". На відрізку $[0, 1]$ відмічено декілька точок, включаючи його кінці, таким чином, що кожна відмічена точка розташована посередині між двома іншими відміченими точками. Доведіть, що всі відмічені точки є раціональними.

17. "Напівінваріант". За круглим столом сидять десять учнів і перед кожним з них покладено кілька цукерок. Всього цукерок є 100. За сигналом кожний учень передає частину своїх цукерок сусіду, що сидить праворуч: половину, якщо у нього їх парна кількість, або одну плюс половину від решти, якщо їх кількість є непарною. Таку операцію можна повторювати до нескінченності. Довести, що через деякий час всі учні матимуть однакову кількість цукерок.

18. "Симетрія". Вздовж паперової стрічки записано 60 знаків "+" та "-". Цю стрічку розрізують на частини з симетричним розташуванням знаків. Доведіть, що існує спосіб розрізування, такий, що кількість частин не перевищує 24. Наведіть приклад такого розташування знаків, при якому не можна отримати менше, ніж 15 частин. Чи можна узагальнити цю задачу і покращити оцінку?

19. "Ігри двох осіб". Двоє грають у гру, яка розпочинається з натуральних чисел m і n . Перший гравець називає будь-яке натуральне число, яке не перевищує $m - 1$. Другий збільшує число, яке назвав перший, на 1, або на 2, ..., або на $m - 1$ за власним вибором і називає результат. Перший гравець робить теж саме з результатом, який отримав другий гравець, після чого черга переходить знову до другого і так далі. Виграє той, хто зможе першим назвати число n . Запропонуйте виграшну стратегію. Спробуйте поширити цю гру на випадок $k \geq 3$ гравців.

20. "Граф". У Квітковому містечку мешкає 31 коротулька, кожний у своєму будиночку. Між деякими з цих будиночків прокладено доріжки, пофарбовані у один з двох кольорів: синій або червоний. Відомо, що в цьому містечку немає жодних трьох будинків, між якими було б прокладено доріжки одного кольору. Яку найбільшу кількість доріжок можна прокласти у такому містечку?



Міністерство освіти і науки України
Науково-методичний центр середньої освіти

П'ятий Всеукраїнський турнір юних математиків

Завдання відбіркового етапу

Вельмишановні учасники Турніру! Задачі, що пропонуються нижче, досить складні, і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У деяких ситуаціях вашій команді буде варто поставити і розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Все це є важливим елементом турнірної "боротьби", оскільки дає підстави для цікавих та корисних наукових дискусій при опонуванні та рецензуванні. Формулювання та результати багатьох задач, як свідчить практика турнірів юних математиків, можуть бути значно узагальнені, і це завжди високо оцінюється на Турнірі (втім, нехтування можливостями узагальнення інколи призводить і до втрати балів).

Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. "Сума похідних".

Нехай $P(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$, $Q(x) = P(x) + P'(x) + P''(x) + \dots + P^{(n)}(x)$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Доведіть, що для непарних $x \in \mathbb{Z}$ $Q(x)$ є парним числом, а для парних $x \in \mathbb{Z}$ $Q(x)$ є непарним числом.

2. "Розбиття числа на доданки".

Позначимо через $S_1(n)$ кількість способів подати натуральне число n у вигляді суми **попарно різних** натуральних доданків, а через $S_2(n)$ — кількість способів подати натуральне число n у вигляді суми **непарних** натуральних доданків (способи, які відрізняються тільки порядком доданків, вважаються однаковими). Доведіть, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність $S_1(n) = S_2(n)$.

3. "Геометричні мініатюри".

Зафіксуємо на площині трикутник ABC .

3.1. Позначимо через S_L , S_M та S_K площі трикутників, вершинами яких є, відповідно, основи бісектрис, медіан та точки дотику вписаного кола даного трикутника ABC . Доведіть, що $S_K \leq S_L \leq S_M$.

3.2. Для точки X , яка знаходиться всередині трикутника ABC , розглянемо трикутник T_X , вершинами якого є точки перетину прямих AX , BX , CX з прямими BC , AC , AB відповідно.

3.2.1. Знайдіть положення точки X , для якого площа трикутника T_X є найбільшою можливою.

3.2.2. Запропонуйте ефективний *критерій* порівняння між собою площ трикутників T_X для різних положень точки X .

3.2.3. Знайдіть положення точки X , для яких периметр трикутника T_X є найменшим можливим та найбільшим можливим.

3.2.4. Запропонуйте ефективний *критерій* порівняння між собою периметрів трикутників T_X для різних положень точки X .

3.2.5. Запропонуйте та розв'яжіть аналогічні задачі щодо екстремальних значень інших параметрів (наприклад, радіуса описаного кола, довжини найбільшої висоти) трикутників T_X .

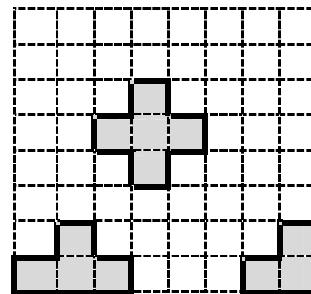
3.3. Для точки Y , яка знаходиться всередині кола ω , описаного навколо трикутника ABC , розглянемо трикутник Δ_Y , вершинами якого є точки перетину AY , BX , CX з колом ω . Запропонуйте та розв'яжіть аналогічні задачі щодо трикутників Δ_Y для різних положень точки Y .

3.4. Запропонуйте та розв'яжіть аналогічні задачі для опуклих багатокутників.

3.5. Для точки Z , яка знаходиться всередині кола ω , описаного навколо трикутника ABC , розглянемо трикутник F_Z , вершинами якого є ортогональні проекції точки Z на прямі BC , AC і AB . Запропонуйте та розв'яжіть аналогічні задачі щодо трикутників F_Z для різних положень точки Z .

4. “Пентаміно на шахівниці”.

У кожній клітинці шахівниці розміру 8×8 стоїть знак “+” або “-”. За один крок дозволяється змінити знак на протилежний в усіх клітинках, які утворюють **X**-пентаміно (п'ятиклітинковий “хрест”), при цьому — якщо центральну клітинку такого **X**-пентаміно розташовано на **каймі** шахівниці — то область, у клітинках котрої змінюються знаки, відповідним чином “обрізується” (див. малюнок). З'ясуйте, чи можна шахівницю, яку скрізь заповнено знаками “-”, за декілька зазначених кроків перетворити на шахівницю, у кожній клітинці якої стоїть знак “+”. Дослідіть, з яких саме вихідних розташувань знаків можна одержати шахівницю, скрізь заповнену знаками “+”. Запропонуйте узагальнення для прямокутних клітчастих дощок інших розмірів, а також — для дощок, які влаштовані на кшталт *циліндрів* і *торів*.



5. “Просторова цілочисельна ґратка”.

Нехай многогранника Φ вписано до просторової цілочисельної ґратки, тобто — всі три координати кожної з його вершин є цілими числами. Дослідіть, скільки такий многогранник Φ може мати вершин, граней та ребер, якщо всередині Φ немає жодного вузла ґратки. Які залежності (зокрема — необхідні, достатні) між кількістю $v(\Phi)$ вершин многогранника Φ , вписаного до просторової цілочисельної ґратки, та кількістю її вузлів на гранях ($s(\Phi)$), ребрах ($e(\Phi)$) та всередині Φ ($i(\Phi)$) ви зможете встановити? Дослідіть випадки $e(\Phi)=0$, $s(\Phi)=0$, знайдіть межі зміни $s(\Phi)$ при заданому $v(\Phi)$. Наведіть нетривіальні нескінченні серії наборів $(v(\Phi); s(\Phi); e(\Phi); i(\Phi))$, які можуть реалізовуватися (або ж, навпаки, не можуть реалізовуватися).

6. “Невичерпні біноміальні коефіцієнти”.

Спростіть вирази:

$$a) \frac{(-1)^0}{C_n^0} + \frac{(-1)^1}{C_n^1} + \dots + \frac{(-1)^n}{C_n^n};$$

$$б) \frac{C_{n-1}^0}{C_{2n-1}^1} + \frac{C_{n-1}^1}{C_{2n-1}^2} + \dots + \frac{C_{n-1}^{n-1}}{C_{2n-1}^n}.$$

7. “Шаховий турнір”.

Відкриту першість Васюків з шахів дирекція міського клубу Чотирьох Конів була змушена припинити через раптовий від'їзд по справах концесії Гросмейстера (Старшого Майстра) О.Бендера. Порадьте, як арбітрам першості найбільш справедливо розподілити місця серед учасників турніру, якщо таблиця незакінченої першості має наступний вигляд. При цьому арбітри повинні враховувати відносну силу гравців і те, що “складність” гри чорними фігурами в 1,2 рази більше за “складність” гри білими фігурами (якщо сума номерів гравців непарна, то гравець з меншим номером грає білими, а якщо парна — то чорними фігурами).

ГРАВЦІ	I	II	III	IV	V	VI	VII
I		1	0	1		1	0
II	0		1/2		0		1
III	1	1/2			1/2	0	
IV	0				0	1	
V		1	1/2	1		1/2	0
VI	0		1	0	1/2		
VII	1	0			1		

8. “Геометрична нерівність”.

Нехай X — така точка всередині правильного трикутника ABC , що $BX + CX < 3 \cdot AX$. Доведіть, що

$$3\sqrt{3} \left(\operatorname{ctg} \frac{\angle AXC}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\angle AXB}{2} \right) + \operatorname{ctg} \frac{\angle AXC}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\angle AXB}{2} > 5.$$

9. “Знов математичний аналіз”.

Розглядаються всілякі **неперервно диференційовні** функції $f:[0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ (це означає, що для будь-якого $x \in [0;1]$ існує $f'(x) =: g(x)$, причому функція g неперервна на сегменті $[0;1]$; під похідними функції f у кінцевих точках сегмента $[0;1]$ вважаються скінченні односторонні похідні $f'_+(0)$ та $f'_-(1)$ відповідно), для яких $f(0) = f(1) = 0$ і $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \leq 1$. Охарактеризуйте множину всіх точок

координатної площини xOy , через які можуть проходити графіки таких функцій.

10. “Незвичайне рівняння”.

Для $m \in \mathbb{Z}_+$ через $P(m)$ позначатиметься добуток всіх цифр його десяткового запису, а через $S(m)$ — їхня сума. Знайдіть кількість $k(n)$ розв’язків рівняння

$$P(P(x)) + P(S(x)) + S(P(x)) + S(S(x)) = n$$

при $n = 2002$. Дослідіть величину $k(n)$ для $n \in \mathbb{N}$. Запропонуйте узагальнення для розглядуваного рівняння.

11. “Нерівність”.

Нехай $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$) і $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 = 1$. Доведіть, що можна обрати такі індекси k та m ($1 \leq k < m \leq n$), що $x_k x_m \left(x_k^2 + x_m^2 + x_k x_m \right) \leq -\frac{1}{n}$.

12. “Періодичний дріб”.

Нехай $p > 5$ — просте число, і число $\frac{1}{p}$ подано як нескінченний десятковий суто періодичний дріб з довжиною періоду n (мається на увазі найменший період): $\frac{1}{p} = 0,(a_1 a_2 \dots a_n)$.

Доведіть, що

$$a) \text{ при } n = 2k \text{ } (k \in \mathbb{N}) \quad \overline{a_1 a_2 \dots a_k} + \overline{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{2k}} = 10^k - 1;$$

$$б) \text{ при } n = 3m \text{ } (m \in \mathbb{N}) \quad \overline{a_1 a_2 \dots a_m} + \overline{a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{2m}} + \overline{a_{2m+1} a_{2m+2} \dots a_{3m}} = 10^m - 1.$$

Запропонуйте узагальнення для розглядуваних фактів.

13. “Графік рівняння”.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Чи існує така функція двох змінних x і y вигляду $F(x; y) = \sum_{k=1}^n |A_k x + B_k y + C_k| + D$,

що графіком рівняння $F(x; y) = 0$ буде правильний n -кутник (мається на увазі *контур*)? Таке ж саме запитання щодо *замкненої багатокутної області*, межею якої є правильний n -кутник.

14. “Ірраціональність”.

Доведіть, що при всіх $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$) число $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}$ є ірраціональним. Дослідіть питання щодо ірраціональності чисел вигляду $m_1 \sqrt{n_1} + \dots + m_k \sqrt{n_k}$ ($n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$). Запропонуйте узагальнення для випадку коренів довільного степеня.

15. “Пляшки, хмарочос та математика”.

Науково-дослідний інститут експериментальної математики розташовано у n -поверховому хмарочосі. Професору X видано m однакових порожніх пляшок і запропоновано точно визначити, при падінні починаючи з якого саме поверху цього інституту така пляшка розбивається, або ж довести, що висоти хмарочосу взагалі не вистачатиме задля розбивання цих пляшок (при падінні пляшка або розбивається ущент або ж залишається непошкодженою; якщо при падінні з деякого поверху пляшка розбивається, то вона розбивається й при падінні з поверхів з більшими номерами; якщо при падінні з деякого поверху пляшка не розбивається, то вона не розбивається й при падінні з поверхів з меншими номерами). Яку найменшу сумарну кількість разів професор X повинен кинути пляшки, щоб розв’язати задачу? Відповідь має залежати від n і m .

VI ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

Завдання відбірних етапів

1. **"Неопуклі чотирикутники"**. Знайдіть усі неопуклі чотирикутники, в яких сума відстаней до прямих, що містять сторони, однакова для будь-якої внутрішньої точки. Спробуйте узагальнити результат на випадок довільного не опуклого многокутника, многогранника.

2. **"Трикутник"**. Нехай A_1, B_1, C_1 — середини сторін BC, AC, AB нерівностороннього трикутника ABC . Навколо трикутника $A_1B_1C_1$ коло γ , до якого проведені дотичні B_2C_2, A_2C_2, A_2B_2 відповідно паралельні сторонам BC, AC, AB . Ці дотичні не мають спільних точок з внутрішньою областю трикутника ABC . З'ясуйте взаємне розташування точок перетину прямих AA_2 і BB_2 , AA_2 і CC_2 , BB_2 і CC_2 та описаного кола γ . Спробуйте розглянути випадок довільних точок A_1, B_1, C_1 , що розташовані на сторонах трикутника ABC .

3. **"Чудовий квадрат"**. Маємо квадрати зі сторонами $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$. Доведіть, що всі квадрати, починаючи з другого, можна укласти в перший без спільних внутрішніх точок. Чи всяку множину квадратів із загальною площею 1 кв. од. можна укласти в квадрат площею 2 кв. од.? Спробуйте узагальнити результати.

4. **"Паперова стрічка"**. Вздовж паперової стрічки записані 60 знаків "+" та "—". Цю стрічку розрізають на частини з симетричним розтушуванням знаків.

- 1). Доведіть, що існує спосіб розрізання, при якому кількість частин не перевищує 24.
- 2). Наведіть приклад такого розташування знаків, при якому не можна одержати менше 15 частин.

Спробуйте узагальнити задачу і покращити оцінку.

5. **"Сума чисел"**. Чи може сума чисел виду $b \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, де

$b \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, дорівнювати $\sqrt{2003}$? Спробуйте узагальнити результат.

6. **"Внутрішня точка піраміди"**. Відомо, що деякі 4 точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ та $A_4(x_4, y_4, z_4)$ утворюють у просторі деяку піраміду $A_1A_2A_3A_4$. Крім того, є точка $M(x_0, y_0, z_0)$. Визначить, у яких випадках точка M є зовнішньою, та коли вона буде внутрішньою точкою піраміди. Організувати ефективну процедуру подібної перевірки. Спробуйте узагальнити задачу на випадок не опуклого замкненого багатогранника, у якого відомі координати вершин.

7. **"Острів Сіробуромалин"**. На острові Сіробуромалин мешкає 2001 сірих, 2002 бурих і 2003 малинових хамелеонів. Якщо зустрічаються 2 хамелеони різного кольору, то вони одночасно міняють свій колір на третій. Чи може бути, що через деякий час всі хамелеони будуть одного кольору? Спробуйте узагальнити на випадок k сірих, m бурих і n малинових хамелеонів.

8. **"Функціональне рівняння"**. Дослідіть на періодичність функції $f(x)$, які при деякому дійсному $a \neq 0$ задовольняють умову

$$f(x+a) + f(x-a) = \sqrt{2}f(x).$$

Чи існують тригонометричні функції, які задовольняють цю умову? А «нетригонометричні»? Розгляньте випадок, коли замість числа $\sqrt{2}$ стоїть якесь інше дійсне значення.

9. **"Довільний багатокутник"**. Розглядається довільний (не обов'язково опуклий) багатокутник. Його хордою називається відрізок, кінці якого лежать на границі багатокутника, а сам він цілком належить багатокутнику.

Чи завжди знайдеться хорда многокутника, яка ділить його на дві рівновеликі частини ? Чи вірно, що будь-який многокутник можна розділити деякою хордою на частини, площа кожної з яких не менша ніж $\frac{1}{3}$ площі многокутника?

10. "Степінь натурального числа". Знайдіть натуральне число, куб якого починається з 2003. Перевірте, для яких степенів справджуються наступні твердження:

- 1). Існує натуральне число, задана степінь якого може починатися з довільної наперед заданої комбінації цифр.
- 2). Існує натуральне число, задана степінь якого може починатися з довільної наперед заданої комбінації цифр, а також закінчуватися деякою іншою заданою комбінацією цифр.

11. "Гра з числами". Грають двоє учнів. Ходи робляться по черзі. Гравець, що робить хід другим, називає деяке натуральне число M . Після цього гравець, що ходить першим, називає натуральне число $n \geq 2$. За один хід дозволяється зменшити число M на будь-який цілий невід'ємний степінь числа n , що не перевершує M . Виграє той, хто одержить 0.

Який з гравців має виграшну стратегію, якщо перший гравець може назвати число n , не більше десяти, а другий гравець називає число M , що дорівнює року: а) у XXI століття? б) у XXII століття? Чи існує M , при якому всі стратегії першого гравця виграшні, програшні?

12. "Цікава множина". Розглядаємо множини, що складаються з n натуральних чисел, таких що усі їх попарні різниці (від більшого віднімається менше) різні. Знайдіть таке найменше число A_n , для якого з чисел $1, 2, \dots, A_n$ завжди можна вибрати подібну множину з n чисел.

13. "Ненульова таблиця". Таблиця $m \times n$ задовольняє умову: кожне число є сумою чисел, сусідніх з ним по стороні. При яких m, n подібна таблиця може не складатися лише з самих нулів.

14. "Вписаний і описаний чотирикутник". Чотирикутник, периметр якого дорівнює P , вписаний в коло радіуса R і описаний навколо кола радіуса r . Перевірте, чи справджується нерівність $P \leq \frac{r + \sqrt{r^2 + 4R^2}}{2}$.

Спробуйте знайти відповідні нерівності для n -кутника ($n \geq 5$), вписаного в коло радіуса R і описаний навколо кола радіуса r .

15. "Нескоротний правильний дріб". Доведіть можливість розкладу нескоротного правильного дробу $\frac{p}{q}$ на скінченну суму дробів вигляду

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}, \quad \text{де } p, q, a_1, a_2, \dots, a_n \text{ — натуральні числа, причому}$$

$1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Складіть ефективний алгоритм, що дозволяє знаходити найменше число доданків у вказаному розкладі.

16. "Шахові королі". Двоє грають за прямокутною дошкою $m \times n$, ставлячи по черзі шахових королів (кожний свого кольору) на дошку. Починаючи з другого ходу, кожен ставить нового короля так, щоб він бився деяким уже поставленим свого кольору, але не бився жодним з королів опонента (другий гравець першим ходом не може ставити свого короля під бій вже поставленого першим гравцем короля). Програє той, хто не може зробити хід. При яких m, n існують виграшні стратегії для першого чи другого гравця?

17. "Рівняння". Розв'яжіть рівняння

$$\frac{1}{(\sqrt{2x} - \sqrt{3})^2} + \frac{1}{((4\sqrt{3} - \sqrt{2})x + \sqrt{3})^2} = \frac{1}{6x^2}.$$

Дослідіть рівняння загального вигляду

$$\frac{1}{(a_1x + b_1)^2} + \frac{1}{(a_2x + b_2)^2} = \frac{1}{(a_3x + b_3)^2},$$

де a_i, b_i ($i = 1, 2, 3$) — деякі дійсні числа.

18. "Опуклий багатокутник". На площині задано опуклий багатокутник $A_1 A_2 \dots A_n$. Позначимо через T_k ($k \leq n$) опуклий k -кутник найбільшої площі, з

вершинами в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$, а через $T_k(A_1)$ опуклий k - кутник найбільшої площі з вершинами в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$, у якого одна з вершин знаходиться в A_1 . Встановити залежність між порядком розташування в послідовності $A_1, A_2, \dots, A_n$ вершин:

1) T_3 та $T_3(A_1)$; 2) T_k та $T_k(A_1)$; 3) T_k та T_{k+1} .

19. "Група". Множина, яка відносно операції $\circ: G \times G \rightarrow G$ задовольняє аксіоми

$$1) \forall x, y, z \in G: (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

$$2) \exists e \in G, \forall x \in G: e \circ x = x \circ e = x,$$

$$3) \forall x \in G, \exists y \in G: x \circ y = y \circ x = e,$$

є групою.

$$\text{Нехай множина } P = \left\{ \frac{ax+b}{cx+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc \neq 0 \right\}.$$

Доведіть, якщо P — група відносно операції $\circ: P \times P \rightarrow P$ такої, що $f(x) \circ g(x) = f(g(x))$, та $\varphi(x) \in P$ таке, що

$$\varphi(x) \circ \psi(x) = \psi(x) \circ \varphi(x), \quad \psi(x) \in P,$$

то $\varphi(x)$ — тільки одна. Спробуйте знайти принаймні ще одну групу з подібною властивістю.

Міністерство освіти і науки України
Науково-методичний центр середньої освіти

Сьомий Всеукраїнський турнір юних математиків

Завдання відбіркового етапу

Вельмишановні учасники Турніру! Задачі, що пропонуються нижче, досить складні, і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У деяких ситуаціях вашій команді буде варто поставити і розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Все це є важливим елементом турнірної “боротьби”, оскільки дає підстави для цікавих та корисних наукових дискусій при опонуванні та рецензуванні. Як свідчить практика турнірів юних математиків, формулювання та результати багатьох задач, особливо таких, які здаються вам надто простими, можуть бути значно узагальнені (навіть якщо це не пропонується умовою задачі), і це завжди високо оцінюється на Турнірі (втім, нехтування можливостями узагальнення інколи призводить і до втрати балів).

Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. “**Функціональне рівняння з параметром**”. Для дійсних значень параметра a знайдіть усі такі **неперервні** на всій числовій прямій функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що $f(x + y + axy) = f(x) \cdot f(y)$ при всіх $x, y \in \mathbb{R}$.

2. “**Взаємно прості числа**”. Розглянемо вираз $f(x; m) = x^m + x^{m-1} - 1$. Нехай $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Доведіть, що множина $\{f(a; m) \mid m \in \mathbb{N}, m \geq 2\}$ містить нескінченну підмножину попарно взаємно простих чисел. Запропонуйте узагальнення цієї задачі для інших виразів $f(x; m)$.

3. “**Знайомі та незнайомі цілі й дробові частини**”.

а) Доведіть, що при всіх $a \geq 2$ має місце нерівність $(a-1)^{[a]-1} \geq [a]^{a-2} \geq a^{[a]-2}$.

б) Доведіть, що при всіх $a \geq 1$ має місце нерівність $a^{\{a\}+a-1} \geq (\{a\} + a)^{a-1} > (a+1)^{\{a\}+a-2}$.

в) Доведіть, що при всіх $a \geq 1$ має місце нерівність $[a]^{a-1} \geq a^{[a]-1} > ([a]+1)^{a-2}$.

4. “**Підмножини**”. Для $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множину $M_n = \{1; 2; \dots; n\}$. Знайдіть усі такі набори $A_0, A_1, \dots, A_n$ підмножин множини M_n , що $|A_k| = k$ при всіх $k \in \{0; 1; \dots; n\}$ і для будь-яких k і j ($0 \leq j, k \leq n$) існує таке i ($0 \leq i \leq n$), що $A_j \cap A_k = A_i$. (Через $|X|$ позначається кількість елементів скінченної множини X ; $|X| = 0$, якщо $X = \emptyset$.)

5. “**Класичний сюжет**”. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Знайдіть усі такі дійсні числа α і β , що для довільних додатних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ справджується нерівність

$$\frac{x_1^\alpha}{y_1^\beta} + \dots + \frac{x_n^\alpha}{y_n^\beta} \geq \frac{(x_1 + \dots + x_n)^\alpha}{(y_1 + \dots + y_n)^\beta}.$$

6. “**Подвійностохастична матриця**”. Числову таблицю розмірами $n \times n$ заповнено невід'ємними числами таким чином, що сума чисел у кожному рядку й у кожному стовпчику дорівнює одиниці. За один крок дозволяється переставити між собою будь-які два стовпчики або ж — будь-які два рядки. Доведіть, що за декілька таких кроків можна досягти того, щоб на **головній діагоналі** таблиці були розташовані тільки додатні числа.

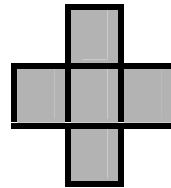
7. “**Періодичні функції**”. Знайдіть **основний** період функції вигляду

$$f(x) = \sum_{k=1}^n A_k \operatorname{tg} \left(\frac{x}{m_k} + \varphi_k \right),$$

де $A_k \neq 0$ при всіх k , $m_1, \dots, m_n$ — попарно різні натуральні числа. Які узагальнення цієї задачі ви можете запропонувати, якщо замість функції tg розглядати інші періодичні функції?

8. “**Злочинці та демократія**”. Нехай n — непарне натуральне число. Група з n злодіїв пограбувала банк. Свою здобич вони вирішили сховати в надійному сейфі. Втім, усі вони були палкими прихильниками демократії, а тому одностайно вирішили, що сейф відкриватиметься тоді й тільки тоді, коли при цьому присутня більшість цього злочинного угруповання. Визначте мінімальну можливу кількість замків і мінімальну можливу кількість ключів, виданих кожному злодієві, щоб забезпечити зазначені правила відкривання сейфа.

9. “**Гуртожиток для PentX’ов**”. $PentX$ — це привид, який мешкає на клітчастій дошці одночасно в п’яти клітинках, що утворюють Х-пентаміно (див. рис). На клітчастій дошці розмірами $m \times m$ ($5 \leq m \leq 10$) потрібно таким чином розселити $PentX$ ’ов, щоб кожен з них повністю знаходився на дошці і при цьому щоб у кожній клітинці мешкало щонайбільше k привидів. Визначте $N(m, k)$ — найбільшу кількість $PentX$ ’ов, котрих можна розселити на дошці зазначеним чином. Дослідіть таку задачу для клітчастих дощок інших розмірів.



10. “**Послідовні числа**”.

а) Чи існують такі $n \in \mathbb{N}$, для котрих знайдеться набір з $2n$ послідовних натуральних чисел, який можна розбити на такі дві групи по n чисел у кожній, щоб добутки чисел у цих групах були рівними?

б) Для яких $n \in \mathbb{N}$ існуватиме набір з n послідовних натуральних чисел, який можна розбити на такі дві групи, щоб добутки чисел у цих групах були рівними (кількість чисел у групах не обов’язково є однаковою)? Доведіть, що для кожного такого n потрібних наборів може існувати тільки скінченна кількість.

11. “**Цікава послідовність**”.

Нехай $x_n = \frac{1}{2004^n} \left(C_n^1 \cdot 2003 + C_n^2 \cdot 2003^2 + \dots + C_n^{[0,9n]} \cdot 2003^{[0,9n]} \right)$, де C_n^k — біноміальні коефіцієнти,

$[0,9n]$ — ціла частина числа $0,9n$. Доведіть, що існує таке $n \in \mathbb{N}$, при якому справджується нерівність $x_n < \frac{1}{2004!}$.

12. “**Знову геометричні нерівності**”. Нехай a, b, c — довжини сторін довільного трикутника, α, β, γ — радіанні міри його відповідних кутів. Доведіть, що

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}.$$

Запропонуйте просторові аналоги цієї нерівності.

13. “**Числові таблиці**”. Для яких натуральних чисел m і n існують такі таблиці розмірами $m \times n$, заповнені числами, не всі з котрих є нулями, що для кожної клітинки число, яке в ній міститься, дорівнює сумі всіх своїх сусідів (для заданої клітинки сусідніми вважаються всі клітинки, що мають з нею спільну сторону)? Дослідіть таку задачу для “таблиць” непрямокутної форми, для просторових “таблиць” тощо.

14. “**Парабола та синусоїда**”. Яку кількість точок дотику можуть мати графіки функцій $y = \sin x$ та $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)? Дослідіть питання щодо кількості точок дотику синусоїди та графіків інших многочленів, інші узагальнення даної задачі тощо.

15. “**Відстані між точками**”. Нехай T — скінченна сукупність точок площини. Через $D(T)$ позначимо множину всіляких попарних відстаней між точками множини T :

$$D(T) = \{ \rho(X, Y) > 0 \mid X, Y \in T \}.$$

а) Для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ знайдіть таке натуральне число M_n , що для кожного набору попарно різних додатних чисел $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ на площині можна обрати таку сукупність T , яка складається з M_n точок і для якої $A \subseteq D(T)$.

б) Запропонуйте дослідження цієї задачі для окремих випадків.

в) Дослідіть питання щодо найменшого можливого значення величини M_n .

г) Розгляньте випадок, коли множина A належить фіксованому сегментові $[\alpha; \beta]$, і доведіть що тоді існує таке число b і таке число $\lambda \in (0; 1)$, що $M_n = \lambda n + b$ задовольняють умову задачі.

д) Дослідіть просторові аналоги даної задачі.

Восьмий Всеукраїнський турнір юних математиків

Завдання відбіркового етапу

Вельмишановні учасники Турніру! Задачі, що пропонуються нижче, досить складні, і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У деяких ситуаціях вашій команді буде варто поставити і розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної "боротьби", оскільки дає підстави для цікавих та корисних наукових дискусій. Як свідчить практика турнірів юних математиків, формулювання й результати багатьох задач, особливо таких, які здаються вам надто простими, можуть бути значно узагальнені (навіть якщо це не пропонується умовою задачі), і це завжди високо оцінюється на Турнірі (утім, нехтування можливостями узагальнення інколи призводить і до втрати балів).

Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. "**Послідовність остач**". Для $n \in \mathbb{N}$ позначимо через x_n таке ціле число, що

$$\left(11^{10^{987}} - 6^{5^{432}} \right)^n \equiv x_n \pmod{10^{200000}},$$

причому $0 \leq x_n < 10^{200000}$. Дослідіть утворену послідовність $x_1, x_2, x_3, \dots$.

2. "**Тетраедр**". Дослідіть властивості тетраедра $ABCD$, для якого має місце рівність

$$\frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{BD}{\sin \beta} = \frac{CD}{\sin \gamma},$$

де α, β, γ — величини двограних кутів при ребрах AD, BD та CD відповідно.

3. "**Геометрична нерівність**". Знайдіть найбільше значення виразу $\frac{p}{R} \left(1 - \frac{r}{3R} \right)$, де p, R, r є, відповідно, півпериметром, радіусом описаного кола і радіусом вписаного кола деякого трикутника.

4. "**Многочлени**". Нехай $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо множину M усіх многочленів вигляду

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1$$

з дійсними коефіцієнтами. Яку підмножину S множини M ви зумієте визначити (охарактеризувати), щоб

$$\min_{P \in S} (a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2) = \frac{4}{n-1}?$$

5. "**Раціональність X** ". Які ви зумієте знайти (охарактеризувати) четвірки натуральних чисел m, n, p, q , щоб з раціональності чисел $X^m - X^p$ і $X^n + X^q$ випливала раціональність числа X ?

6. "**Цілі значення виразу**". Нехай задано натуральні числа m, n і k , причому добуток mn не є точним квадратом. Дослідіть питання щодо кількості різних цілих значень, яких може

набувати вираз $\sum_{j=1}^k A_{2j-1}A_{2j}$ за умови, що $A_1, A_2, \dots, A_{2k} \in \{\sqrt{m} - \sqrt{n}, \sqrt{m} + \sqrt{n}\}$.

7. "**Збіжні послідовності**". Які ви зумієте знайти (охарактеризувати) пари дійсних чисел α і β , що з існування скінченної границі $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_{n+2} + \beta x_{n+1} + x_n)$ випливатиме збіжність по-

слідовності $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0; +\infty)$?

8. "**Чарівні фігури на координатній площині**". Назвемо фігуру F на координатній площині xOy **чарівною**, якщо для будь-яких двох точок $M_1(x_1; y_1) \in F, M_2(x_2; y_2) \in F$ справджується нерівність $|x_1y_2 - x_2y_1| \leq 1$. Дослідіть властивості **чарівних** фігур.

9. “**Функціональне рівняння з параметром**”. Знайдіть усі такі дійсні числа α , для яких існує тільки одна функція $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ така, що при всіх $x, y \in \mathbf{R}$ має місце рівність

$$f(x^2 + y + f(y)) = (f(x))^2 + \alpha y.$$

10. “**Композиція функцій**”. Нехай $f(x) = x^2 - 2$. Знайдіть усі такі функції $\varphi: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, що для будь-якого $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$ справджується рівність $f(\varphi(x)) = \varphi(f(x))$.

11. “**Незвичайна нерівність**”. Нехай $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$. Знайдіть усі такі набори додатних дійсних чисел $b, a_1, a_2, \dots, a_n$, що нерівність

$$1 + \sum_{k=1}^n a_k x_k^b \geq \frac{1 + \sum_{k=1}^n a_k}{\prod_{k=1}^n (1 + a_k)} \cdot \prod_{k=1}^n (1 + a_k x_k)$$

справджується для всіх наборів додатних дійсних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, котрі задовольняють

умову $\prod_{k=1}^n x_k \geq 1$.

12. “**Ілюмінований граф**”. Нехай $n \geq 2$. Дано зв’язний n -вершинний граф. У кожній його вершині міститься лампочка, що має два стани: “вимкнута” та “увімкнута”, причому спочатку всі лампочки вимкнуті. За один крок дозволяється обирати якусь вершину й змінювати на протилежний їй стан лампочки, що знаходиться в цій вершині, і стан лампочок, що знаходяться в суміжних з нею вершинах.

а) Доведіть, що довільний зв’язний n -вершинний граф за декілька кроків можна “ілюмінувати” — досягти того, щоб усі лампочки виявилися увімкнутими.

б) Нехай a_n — найменше таке число, що довільний зв’язний n -вершинний граф за щонайбільше a_n кроків можна “ілюмінувати”. Для кожного натурального числа $n \geq 2$ визначте a_n .

13. “**Комбінаторна алгебра**”. Для множини $M \neq \emptyset$ через $F(M)$ позначимо сукупність усіх відображень $f: M \rightarrow M$ ($f(M) \subseteq M$).

а) Чи для будь-якого відображення $f \in F(M)$ існує таке відображення $g \in F(M)$, що для всіх $x \in M$ справджується рівність $f(x) = f(g(f(x)))$?

б) Які необхідні та достатні умови має задовольняти множина M , щоб для будь-якого відображення $f \in F(M)$ при всіх $x \in M$ справджувалася рівність $f(x) = f(f(x))$?

в) Для яких відображень $f \in F(M)$ існуватиме таке відображення $g \in F(M)$, що для всіх $x \in M$ справджуватиметься рівність $g(x) = g(f(g(x)))$?

14. “**Фішки на просторовій шахівниці**”. На просторовій “шахівниці” розміром $m \times n \times k$ розставлено фішки так, що кожна клітинка, що не містить фішки, має спільну грань принаймні з однією такою клітинкою, котра містить фішку, а будь-яку пару клітинок, що містять фішки, можна сполучити таким “ланцюжком” клітинок, що всі вони також містять фішки, причому кожні дві послідовні клітинки цього “ланцюжка” мають спільну грань. Оцініть знизу кількість фішок, що їх можна розставити на просторовій “шахівниці” згідно з наведеною вище умовою.

15. “**Перестановки**”. Для натурального числа $n \geq 2$ через L_n будемо позначати кількість таких перестановок $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ перших n натуральних чисел, що $1 \leq |a_k - k| \leq 2$ при всіх

$k \in \{1; 2; \dots; n\}$. Знайдіть інтервал $(\alpha; \beta)$ якомога меншої довжини такий, що $\frac{L_n}{L_{n-1}} \in (\alpha; \beta)$

при всіх $n \geq 2005$.

Міністерство освіти і науки України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

Дев'ятий Всеукраїнський турнір юних математиків

Завдання відбіркового етапу

Вельмишановні учасники Турніру! Задачі, що пропонуються нижче, досить складні, і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У деяких ситуаціях вашій команді буде варто поставити і розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної "боротьби", оскільки дає підстави для цікавих та корисних наукових дискусій. Як свідчить практика турнірів юних математиків, формулювання й результати багатьох задач, особливо таких, які здаються вам надто простими, можуть бути значно узагальнені (навіть якщо це не пропонується умовою задачі), і це завжди високо оцінюється на Турнірі (утім, нехтування можливостями узагальнення інколи призводить і до втрати балів).

Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. **"«Тупокутна» множина»**. Множина M точок площини називається *тупокутною*, якщо для будь-якої трійки точок A, B, C цієї множини трикутник ABC є тупокутним. Дослідіть питання щодо існування для *тупокутної* множини M такої точки $X \notin M$, що множина $M \cup \{X\}$ також є *тупокутною*.

2. **"Поле чудес"**. Нехай $m \geq 1$ і $n \geq 2$ — натуральні числа. Спонсор капітал-шоу "Поле чудес" для преміювання фіналіста підготував m дорогих автомобілів і n цапів. Фіналіст має стати володарем або одного з цих автомобілів, або ж — одного з цих цапів. У кожній з $m + n$ чорних скриньок випадковим чином розміщується або нашійник для цапа, або ключи від автомобіля. Шоумен запитує фіналіста: "Де ж автомобіль?" Гравець указує на певну скриньку, але ведучий спочатку відкриває іншу, в якій знаходиться цапів нашійник. Ведучий запитує: "Ви наполягаєте на своєму виборі?" Якщо гравець наполягає, то ведучий відкриває саме обрану гравцем скриньку і вручає фіналістові приз, а якщо ні — то гравцеві дозволяється відкрити якусь іншу (на його вибір) скриньку й отримати відповідний приз. При якій стратегії для гравця ймовірність виграти автомобіль є більшою: а) завжди наполягати на своєму виборі; б) ніколи не наполягати на своєму виборі? Запропонуйте й дослідіть узагальнення цієї задачі.

3. **"Цеглини в коробці"**. Яку найбільшу кількість цеглин розміром $1 \times 1 \times 4$ можна розмістити в коробці розміром $6 \times 6 \times 2006$? Запропонуйте й дослідіть узагальнення цієї задачі.

4. **"Нерівність з модулями"**. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ має місце не-

рівність $\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n |a_k + a_m| \geq \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n |a_k - a_m|$. Дослідіть питання щодо досяжності рівності в такій нерівності.

5. **"Корені многочленів"**. Дано многочлен 2006-го степеня з дійсними коефіцієнтами $P(x) = a_{2006}x^{2006} + a_{2005}x^{2005} + \dots + a_1x + a_0$, який має 2006 дійсних коренів $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{2006}$. Нехай $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{2005}$ — корені многочлена $P'(x)$. Знайдіть

$$\sum_{i=1}^{2006} \sum_{j=1}^{2005} \frac{1}{\alpha_i - \beta_j}.$$

6. **"Півгрупи"**. Множина $S \neq \emptyset$ називається *півгрупою*, якщо існує таке відображення $f: S \times S \rightarrow S$, що для будь-яких $a \in S, b \in S, c \in S$ має місце співвідношення $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$. Для $x \in S$ і $y \in S$ позначатимемо $f(x, y)$ символом $x \circ y$. Наведіть якомога більше прикладів і дослідіть властивості півгруп S таких, що кожен елемент $u \in S$ можна подати у вигляді $u = e_1 \circ e_2 \circ \dots \circ e_n$, де $n \in \mathbb{N}$, $e_k \circ e_k = e_k$ при всіх $k, 1 \leq k \leq n$.

7. **"Описані дев'ятнадцятигранники"**. Нехай F — множина всіляких дев'ятнадцятигранників (розглядаються поверхні), описаних навколо сфери радіуса r . Дослідіть властивості множини $D(r) = \{\delta > 0 \mid \forall M \in F \exists X \in M \exists Y \in M : \rho(X, Y) > \delta\}$ (тут через $\rho(X, Y)$ позначається відстань між точками X і Y). Які з чисел 21, 22, 24 належать множині $D(10)$?

8. “**Трансцендентне рівняння**”. Нехай a, b, c, d — дійсні числа, причому $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1, a \neq b$. Дослідіть кількість розв’язків рівняння вигляду

$$a^x = b^x + cx + d.$$

9. “**Діофантове рівняння**”. Нехай задано натуральне число $p \geq 2$ та натуральні числа m і $n, n > 1$. Дослідіть розв’язність у натуральних числах x і y рівняння

$$p^{n-1}(x^n + y^n) = (x - y)^{mn}.$$

10. “**Рівняння в комплексній площині**”. Нехай $P(z)$ — многочлен n -го степеня з комплексними коефіцієнтами. Дослідіть властивості рівняння вигляду $P(z) = \bar{z}$ (тут для $z \in \mathbb{C}$ через $\bar{z}$ позначається комплексно-спряжене число).

11. “**Аналоги опуклості функцій**”. Дано дійсні числа $\alpha > 1$ і $\beta > 1$. Нехай для функції $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ для будь-яких $x \in [0; +\infty)$ і $y \in [0; +\infty)$ справджується нерівність

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Дослідіть питання щодо нерівності

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\left(\frac{x_1^\beta + x_2^\beta + \dots + x_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)$$

($x_1, x_2, \dots, x_n \in [0; +\infty)$; $n \geq 3$).

12. “**Перерізи куба**”. Нехай AB, AC і AD — ребра куба, $AB = a$. Точку E відмітили на промені AC так, що $AE = \lambda a$, а точку F відмітили на промені AD так, що $AF = \mu a$ ($\lambda > 0, \mu > 0$). Які ви зумієте знайти (охарактеризувати) пари чисел λ і μ такі, що площа перерізу куба будь-якою площиною, паралельною площині BCD , дорівнює площі перерізу тетраедра $ABEF$ тією ж самою площиною.

13. “**Суми й добутки**”. Нехай $m \geq 2, n \geq 2$ — задані натуральні числа. Дослідіть рівняння

$$\prod_{k=1}^n (x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_k^m + x_{k+1} + \dots + x_n) = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^n$$

(у натуральних числах $x_1, x_2, \dots, x_n$).

14. “**Занумеровані кульки**”. У Петрика було N кульок, занумерованих усіма натуральними числами від 1 до N . Нехай $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Петрик загубив m кульок. При якому найбільшому $m = m(N, k)$ з-поміж кульок, котрі залишилися, можна вибрати $2k$ кульок так, щоб сума чисел на половині з них дорівнювала сумі чисел на решті з вибраних кульок?

15. “**Тривалість освітлення**”. Дослідіть тривалість освітлення точки M на планеті Z Сонячної системи в залежності від положення цієї точки на поверхні планети та в залежності від положення планети на орбіті обертання навколо Сонця в межах наступної моделі (можете запропонувати й додаткові обмеження). Планета Z вважається кулею з центром у точці O , яка рівномірно обертається навколо власної осі з періодом обертання T_0 і — одночасно — з періодом T_1 навколо Сонця по орбіті, яка є колом з центром у точці O_1 . Власна вісь обертання планети нахилена до площини орбіти обертання навколо Сонця під кутом φ . Планета Z у кожний момент часу освітлюється променями світла, паралельними прямій OO_1 .

Х ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

Завдання для відбіркових етапів турніру¹

Вельмишановні учасники Турніру! Задачі, що пропонуються нижче, досить складні, і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У деяких ситуаціях вашій команді буде варто поставити і розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної "боротьби", оскільки дає підстави для цікавих та корисних наукових дискусій. Як свідчить практика турнірів юних математиків, формулювання й результати багатьох задач, особливо таких, які здаються вам надто простими, можуть бути значно узагальнені (навіть якщо це не пропонується умовою задачі), і це завжди високо оцінюється на Турнірі (утім, нехтування можливостями узагальнення інколи призводить і до втрати балів).

Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. "**Цілі частини**". Нехай $n \geq 2$ — натуральне число. Які ви зумієте знайти (охарактеризувати) набори дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, щоб для всіх $x \in \mathbf{R}$ мала місце рівність $[\mu_1 x + \lambda_1] + [\mu_2 x + \lambda_2] + \dots + [\mu_n x + \lambda_n] = [(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) x]$ (тут через $[a]$ позначається ціла частина числа a)?

2. "**Прості дільники**". Для яких пар простих чисел p і q ви зумієте знайти (чи оцінити) кількість простих дільників числа $p^{(p^q)} - 1$?

3. "**Фарбування кульок та теорія ймовірностей**". Спочатку в урні знаходиться 100 білих кульок. Щокроку навмання вибирають кульку з урни, фарбують у чорний колір і повертають до урни. Кульку можна фарбувати декілька разів, причому кілька разів пофарбована кулька не відрізняється від пофарбованої один раз. Знайдіть розподіл кількості білих кульок після 100 кроків.

4. "**Знов нерівність з модулями**". Нехай $n \geq 2$ — натуральне число. Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ і $b_1, b_2, \dots, b_n$ справджується нерівність

$$\left| \prod_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \prod_{i=1}^{k-1} b_i \right| \left| \prod_{i=k+1}^n a_i \right| |a_k - b_k|$$

(вважається, що $\prod_{i=1}^0 b_i = 1$, $\prod_{i=n+1}^n a_i = 1$).

5. "**Шматування мотузки**". Нехай задано дійсні числа $a > 0$ та $d \in (0; 1)$. У кравця є нескінченний набір лінійок, довжини яких утворюють таку незростаючу послідовність додатних дійсних чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, що для всіх $n \in \mathbf{N}$ виконується нерівність $x_n \leq ad^n$. Кравець бере мотузку довжини L і крок за кроком нарізає її на шматки за наступним алгоритмом. На кожному кроці обирається найбільший з наявних шматків мотузки (на початку він єдиний), до нього прикладається найдовша серед коротших за нього лінійок, і робиться відповідний розріз. Після кроку, на якому зникає останній шматок, довший за x_n , кравець оголошує про завершення n -того етапу роботи і підраховує сумарну довжину S_n усіх наявних на цей момент шматків, які є коротшими за x_n , після чого робота триває. Чи обов'язково знайдеться таке дійсне число $\varepsilon > 0$, що $S_n \leq L - \varepsilon$ для всіх $n \in \mathbf{N}$?

¹ для проведення шкільних, районних, міських та обласних етапів турніру відповідні журі й оргкомітети можуть частково змінювати запропонований перелік задач

6. “**Оптимальне розрізання чотирикутника**”. Запропонуйте алгоритм розрізання довільного опуклого чотирикутника якнайменшим числом прямих на частини, з яких можна скласти трикутник, рівновеликий даному чотирикутнику.

7. “**Народні обранці**”. Парламент країни Турляндії складається з n народних депутатів. Комісією з депутатської етики встановлено, що для кожних двох депутатів цього парламенту має місце усталена традиція, згідно з якою щосесії або перший з них дає ляпаса другому або другий дає ляпаса першому. Для якої найменшої загальної кількості ляпасів протягом одної цілої сесії може трапитись так, щоб кожен із депутатів отримав принаймні одного ляпаса?

8. “**Прогресії**”. Нехай $n \geq 2$ — натуральне число. Дослідіть питання щодо найменшої кількості арифметичних прогресій, жодні дві з яких не мають спільних елементів, і об’єднання яких містить множину $\{\frac{1}{k} : 1 \leq k \leq n, k \in \mathbf{N}\}$.

9. “**Інтеграл**”. Для неперервної функції $f : [0; 1] \rightarrow [0; +\infty)$ та для натуральних чисел n і $k, 1 \leq k \leq n$, дослідіть нерівність $\int_0^1 (1 + x^n - x^k - x^{n-k}) f(x) dx \geq 0$.

10. “**Прямі на площині**”. Нехай $n \geq 2$ — натуральне число. На яку найменшу кількість m_n і на яку найбільшу кількість M_n частин можуть розбити площину n прямих? Для яких натуральних $k, m_n \leq k \leq M_n$, існує розбиття площини прямими на k частин?

11. “**Квадратний тричлен**”. Нехай квадратний тричлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ не має дійсних коренів, причому $P(x) > 0$ для всіх дійсних $x > 0$. Доведіть, що існують такі відмінні від констант многочлени $Q(x)$ і $S(x)$ з невід’ємними дійсними коефіцієнтами, що $Q(x) = P(x)S(x)$ для всіх $x \in \mathbf{R}$. Дослідіть питання щодо оцінки степеня многочлена $Q(x)$.

12. “**Опуклий многокутник**”. Усередині опуклого многокутника $A_1A_2\dots A_n$ обрано таку точку M , що $\sum_{k=1}^n \overrightarrow{A_kM} = \vec{0}$. Доведіть, що $nP \geq 4d$, де P — периметр многокутника, $d = \sum_{k=1}^n |\overrightarrow{A_kM}|$. Дослідіть питання щодо досяжності рівності в цій нерівності.

13. “**Паперовий квадрат**”. Паперовий квадрат перегинається по прямій ℓ , що проходить через його центр, таким чином, що утворюється неопуклий дев’ятикутник. Дослідіть питання щодо кола найбільшого радіуса, яке можна розташувати в такому дев’ятикутнику.

14. “**Циклічна рівність**”. Для яких натуральних n існують такі додатні дійсні числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, що

$$\frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_2 + x_4} + \dots + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} + \frac{x_1}{x_n + x_2} = 2?$$

15. “**Дві функції**”. Нехай $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ і $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — такі функції, що для всіх $x \in \mathbf{R}$ та $y \in \mathbf{R}$ мають місце рівності

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x), \quad g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y).$$

Доведіть, що $\sum_{k=1}^{2n+1} |g(kx)| \geq n|f(x)| + \frac{1}{2}|f(2nx)|$ та $\sum_{k=1}^{2n+1} |f(kx)| \geq n|g(x)| + \frac{1}{2}|g(2nx)|$ для будь-яких $x \in \mathbf{R}$ і $n \in \mathbf{N}$.

Матеріали для проведення відбіркових етапів турніру підготували:

В.О.Борисова, В.М.Брацихін, О.Г.Кукуш, О.О.Курченко, В.М.Лейфура, І.М.Мітельман, А.Я.Оленко, М.О.Перестюк, К.В.Рабець, В.М.Радченко, О.Ю.Теплінський, Л.І.Філософ, С.П.Шаповалов, Г.М.Шевченко, В.А.Ясінський.

XI Всеукраїнський турнір юних математиків

Завдання для відбірних етапів турніру

Вельмишановні учасники Турніру ! Задачі, що пропонуються нижче, досить складні, і не обов'язково мають бути розв'язані повністю. Оцінюватись будуть і окремі часткові просування, розбір окремих суттєвих випадків тощо. У деяких ситуаціях вашій команді варто буде поставити і розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної "боротьби", оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Як свідчить практика турнірів юних математиків, формулювання й результати багатьох задач, особливо таких, які здаються вам надто простими, можуть бути значно узагальнені (навіть якщо це не пропонується умовою задачі), і це завжди високо оцінюється на Турнірі (втім, нехтування можливостями узагальнення інколи призводить і до втрати балів).

Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. Тригонометричне рівняння. Навести якомога більше методів розв'язання тригонометричного рівняння

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Описати множину всіх тих значень параметрів a, b, c , для яких рівняння має розв'язки. Дати інтерпретацію цієї множини у декартовій просторовій системі координат.

2. Фулерени. Біля 20 років тому вчені відкрили, що атоми вуглецю за певних умов утворюють молекули з 60-ти і більше атомів, розташованих у вершинах многогранника з п'ятикутними та шестикутними гранями. Нехай многогранник має n вершин і лише п'ятикутні та шестикутні грані. Знайти число цих граней у залежності від числа вершин n .

3. Новий спосіб множення чисел. Миколка вихваляється, що винайшов новий спосіб множення чисел, який проілюстровано у наступній таблиці:

	5	7	4	3	8	
1	1/0	1/4	0/8	0/6	1/6	2
4	2/5	3/5	2/0	1/5	4/0	5
7	3/5	4/9	2/8	2/1	5/6	7
	6	1	5	6	6	

Поясніть, у чому полягає спосіб Миколки, і чи справді він приводить до правильних результатів.

4. **Хорди у колі.** У колі проведено хорди AB і CD , які не перетинаються. На хорді AB або на її продовженні взято точку E . За допомогою циркуля та лінійки побудувати точку F на дузі AB таку, що $\frac{PE}{EQ} = \frac{m}{n}$, де m, n – задані натуральні числа, P – точка перетину хорди AB з хордою FC ; Q – точка перетину хорди AB з хордою FD . Розглянути випадки, коли $E \in PQ$ та $E \notin PQ$.

5. **Сума цифр.** Для кожного натурального n позначимо через $S(n)$ суму цифр усіх натуральних чисел від 1 до n . Знайдіть $S(2008)$. Нехай $N_k = \overbrace{aa\ldots a}^k$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Виразіть $S(N_k)$ через a і k . Дослідіть:

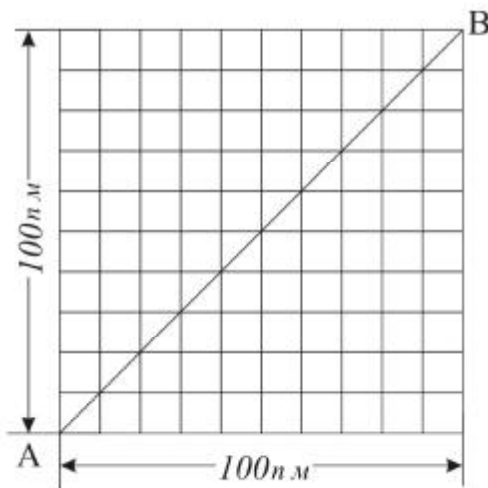
- 1) для яких a сума $S(N_k)$ ділиться на a при будь-якому $k \in \mathbb{N}$;
- 2) скількома нулями може закінчуватися $S(N_k)$.

6. **Точка в трикутнику.** Довести, що в площині $\triangle ABC$ існує точка K така, що

$$AK^2 - BC^2 = BK^2 - AC^2 = CK^2 - AB^2.$$

Нехай Q, N, T – відповідно точки перетину медіан трикутників BKC, SKA, AKB . Доведіть, що відрізки AQ, BN і CT рівні і мають спільну точку.

7. **Траєкторії на полі.** Поле площею n^2 га розбито на квадрати площею 1 га як показано на малюнку



Траєкторією назвемо довільний шлях межами квадратів із точки A у точку B довжиною $200n$ метрів.

- 1). Скільки всього є траєкторій?

2). Отримайте рекурентне співвідношення для числа траєкторій, які не перетинають діагональ AB (спільні точки діагоналі з траєкторією допускаються).

3). Отримайте рекурентне співвідношення для числа траєкторій, які хоча б один раз перетинають діагональ AB .

8. **Тригонометричні суми.** Знайдіть усі такі значення $n \in \mathbb{N}$, для яких виконуються тотожності:

$$1) \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sin^{2n} \frac{pk}{n} - \cos^{2n} \frac{pk}{n} \right) = 1; \quad 2) \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\sin^n \frac{pk}{n} + \cos^n \frac{pk}{n} \right) = 1.$$

Обчисліть суми :

$$\begin{aligned} 3) \sum_{k=1}^{n-1} \cos^{2l} \frac{pk}{n}; & \quad 4) \sum_{k=1}^{n-1} \sin^{2l} \frac{pk}{n}; \\ 5) \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cos^{2l+n} \frac{pk}{n}; & \quad 6) \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sin^{2l+n} \frac{pk}{n}, \end{aligned}$$

де l – довільне невід'ємне ціле число.

9. **Екзотична послідовність.** Нехай N – фіксоване натуральне число. Навести приклад розбіжної послідовності (a_n) такої, що для кожного натурального числа $k, 1 \leq k \leq N: \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{kn} - a_n) = 0$. Чи існує така розбіжна послідовність (a_n) , що для кожного натурального k послідовність $(a_{kn} - a_n)$ є збіжною ?

10. **Нитка і кільце.** На вертикально встановленій дошці у точках A і B закріплені кінці нитки довжиною $l > AB$. Відрізок AB утворює гострий кут α з вертикальним напрямком. У стані рівноваги кільце з важком зайняло положення у точці C . Знайти відношення, у якому кільце ділить нитку. Масою нитки знехтувати.

11. **Композиція функцій.** Чи існують функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що:

$$1) \begin{cases} f(g(x)) = x^2, \\ g(f(x)) = x^3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} f(g(x)) = x^2, \\ g(f(x)) = x^4. \end{cases}$$

12. **Три числа.** Натуральні числа від 1 до 2008 включно розбито на 6 непорожніх множин. Доведіть, що принаймні в одній з них знайдуться три числа, одне з яких дорівнює сумі двох інших. Нехай далі натуральні числа від 1 до N включно розбито на k непорожніх множин. Для яких N і k хоча б в одній з цих множин знайдуться три числа, одне з яких дорівнює сумі двох інших?

13. **Башти.** На площині розташовано дві циліндричні башти з радіусами основ r і R . Знайти множину всіх тих точок площини, з яких ці башти видно під однаковим кутом. Розглянути випадок більшої кількості башт.

14. **Рекурентна послідовність.** Нехай $u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 3^3, \dots, u_{n+1} = 3^{u_n}, \dots$

Довести, що для $n \geq 2$ число $u_n - u_{n-1}$ ділиться на n .

15. **Бісектриси.** Нехай I – точка перетину бісектрис $\triangle ABC$; W_1, W_2, W_3 – відповідно точки перетину прямих AI, BI, CI з описаним навколо трикутника колом; r та R – радіуси вписаного та описаного кіл. Довести справедливості нерівності

$$IW_1 + IW_2 + IW_3 \geq 2R + \sqrt{2Rr}.$$

16. **Майже геометричні прогресії.** Послідовність (a_n) натуральних чисел назвемо майже геометричною прогресією якщо для всіх $n \geq 2$ виконується рівність $|a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1}| = 1$. Які майже геометричні прогресії, що починаються з числа $a_1 = 1$, ви зумієте побудувати? Запишіть формули їх загальних членів.

17. **Раціональні точки.** Назвемо точку площини чи простору раціональною, якщо всі її координати – раціональні числа.

1). Доведіть, що на колі $x^2 + y^2 = R^2$ існує безліч раціональних точок тоді й тільки тоді, коли на ньому існує хоча б одна раціональна точка.

2). Довести, що на колі $x^2 + y^2 = 5$ є безліч раціональних точок, а на колі $x^2 + y^2 = 7$ їх немає.

3). Узагальнити ці твердження на випадок сфери.

18. **Функціональне рівняння.** Знайти всі монотонні функції $f : [4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, які при кожному $x \geq 4$ задовольняють рівність

$$f(x^2) = f(x) + \frac{1}{\sqrt[2008]{\log_2(\log_2 x)}},$$

де символ $[\cdot]$ означає цілу частину числа.

19. **Пошук стратегії успіху.** Нехай N – натуральне число. Двоє гравців Андрійко і Миколка по черзі записують числа з множини $\{1, 2, \dots, N\}$ на дошці. Гру розпочинає Андрійко, записуючи на дошці число 1. Далі, якщо гравець, виконуючи свій хід, записав на дошці число n , то його суперник, виконуючи

наступний хід, записує число $n+1$ або $2n$, але при цьому записане число не повинно перевищувати N . Виграє той, хто зможе записати число N .

- 1). Визначте, хто з гравців має виграшну стратегію для $N=2008$ ($N=2007$).
- 2). Знайдіть усі такі натуральні числа $1 \leq N \leq 2006$, для яких Миколка має виграшну стратегію.
- 3). Знайдіть найменше $N > 2008$, для якого Андрійко не буде мати виграшної стратегії.

ХІІ ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

5. «**Гомологічне рівняння**». Нехай дано дійсне число a . Знайдіть усі неперервні на множині $\mathbf{R}$ періодичні з періодом $T=1$ функції f такі, що $f(x+a) - f(x) = \sin 2\pi x$ для всіх $x \in \mathbf{R}$.

6. «**Числові набори та подільність**». Розглядаються всі можливі набори цілих чисел $(a_1; a_2; \dots; a_{100})$ (серед чисел у наборі можуть бути однакові) такі, що $0 \leq a_k \leq 100$ для всіх $k \in \{1; 2; \dots; 100\}$, і $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$ ділиться без остачі на 10. Скільки серед цих наборів таких, що містять хоча б одне число 100?

7. «**Невичерпні числа Фібоначчі**». Послідовність чисел Фібоначчі задається рівностями: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$. Доведіть, що для всіх цілих $k \geq 0$:

а) $F_{6k+1}^2 + F_{6k+2}^2 + F_{6k+5}^2 - 3$ ділиться без остачі на 4;

б) $F_{2k+1} + F_{2k+3} + 2^{2k+1}$ ділиться без остачі на 5;

в) $(2k+1)F_{2k} + kF_{2k+1}$ ділиться без остачі на 5.

8. «**Оцінки для послідовностей**». Розглядаються всілякі числові послідовності додатних чисел $\{a_n\}_{n \geq 0}$, що задовольняють нерівність $a_{n+1} \geq 2a_n^2 + \frac{2}{17}$ для всіх $n \geq 0$. Знайдіть найбільше M таке, щоб для кожної розглядуваної послідовності справджувалась нерівність $a_{n+17} \geq Ma_{n-17}^4$ для всіх $n \geq 17$.

9. «**Інтегральне рівняння**». Знайдіть усі такі неперервні функції $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, що для всіх $x \in \mathbf{R}$ і натуральних $n \geq 2$ виконується рівність

$$\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt = \frac{f(x)}{n} + \frac{1}{2n^2}.$$

10. «**Рівняння з параметрами**». Дослідіть рівняння

$$a^2 x^4 + 5ax^3 + (2ab - 6)x^2 + 5bx + b^2 = 0$$

(у залежності від значень параметрів $a \in \mathbf{R}$ і $b \in \mathbf{R}$).

11. «**Перефарбування клітчастої дошки**». Нехай $p \leq q \leq m \leq n$ — задані натуральні числа. Візьмемо клітчасту дошку розміром $m \times n$, кожна клітинка якої є квадратом розміром 1×1 , пофарбованим у білий колір. За один крок дозволяється обрати прямокутник розміром $p \times q$ або $q \times p$ та “інвертувати” кольори всіх його клітинок (тобто білі клітинки перефарбувати в чорний колір, а чорні клітинки — у білий). Дослідіть, які розфарбування нашої клітчастої дошки можна одержати в описаний спосіб.

12. «**Куб та площа**». Нехай куб лежить по один бік відносно деякої площини. Доведіть, що набір з восьми чисел — відстаней від вершин куба до цієї площини — можна розбити на дві такі четвірки $\{a; b; c; d\}$ і $\{e; f; g; h\}$, що $a + b + c + d = e + f + g + h$ і $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + g^2 + h^2$. Дослідіть питання щодо співвідношення між числами $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ і $e^3 + f^3 + g^3 + h^3$ для розглядуваних четвірок.

13. «**Черга до каси**». До каси банку, у якій є S тисяч гривень, вишикувалась черга з $m + n$ математиків, m з яких здають на депозит по X тисяч гривень, а n — одержують кредити по Y тисяч гривень. Клієнти в черзі розташовані випадковим чином. Знайдіть імовірність того, що жоден із клієнтів не буде чекати кредиту.

14. «**Мимобіжні послідовності**». Нехай для натурального $m \geq 2$ задано m ірраціональних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ таких, що $1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$. Числові послідовності $\{n\alpha_1 | n \in \mathbb{N}\}$, $\{n\alpha_2 | n \in \mathbb{N}\}$, $\dots$, $\{n\alpha_m | n \in \mathbb{N}\}$ назовемо *мимобіжними*, якщо для кожного $l \in \mathbb{N}$ існує **рівно одна** така пара натуральних чисел p і k , що $1 \leq k \leq m$ і $p\alpha_k \in (l; l+1)$. Дослідіть умови існування таких послідовностей.

15. «**Тригонометрія та двогранні кути**». Дано трикутну піраміду $SABC$, у якій $\angle BSC = \alpha$, $\angle CSA = \beta$, $\angle ASB = \gamma$, і двогранні кути при ребрах SA і SB мають величину φ і δ відповідно. Доведіть, що $\gamma > \alpha \cdot \cos \delta + \beta \cdot \cos \varphi$.

16. «**Цікава послідовність**». Для яких цифр a , $1 \leq a \leq 9$, у послідовності $X_n = \overline{2009 \underbrace{aa \dots a}_n}$, $n \geq 1$ (розглядається десятковий запис чисел), можна обрати

таку підпослідовність $\{X_{n_k}\}_{k \geq 1}$, у якій кожен наступний член ділиться без остачі на попередній? Аналогічне питання дослідіть для послідовності $Y_n = \overline{\underbrace{aa \dots a}_n 2009}$, $n \geq 1$.

17. «**Нерівності для площ**». Дано трикутник ABC , усередині якого відмічено точку M . На сторонах BC , CA й AB обрано такі точки A_1 , B_1 і C_1 відповідно, що $MA_1 \parallel CA$, $MB_1 \parallel AB$, $MC_1 \parallel BC$. Нехай S — площа трикутника ABC , Q_M — площа трикутника $A_1B_1C_1$.

а) Доведіть, що якщо трикутник ABC гострокутний, а M — точка перетину його висот, то $3Q_M \leq S$. Чи існує таке число $k > 0$, що для будь-якого гострокутного трикутника ABC та точки M перетину його висот справджується нерівність $Q_M \geq kS$?

б) Для випадків, коли точка M — точка перетину медіан, центр вписаного ко-

ла, центр описаного кола, знайдіть найбільше $k_1 > 0$ і найменше $k_2 > 0$ такі, що для довільного трикутника ABC має місце нерівність $k_1 S \leq Q_M \leq k_2 S$ (для центра описаного кола розглядаються тільки гострокутні трикутники ABC).

18. «Гра з числами». Нехай задано натуральне число n . Двоє гравців, Андрійко та Миколка, по черзі записують на дошці натуральні числа, кожне з яких не перевищує n , за такими правилами. Гру розпочинає Андрійко, записуючи число 1. Далі, якщо гравець, роблячи свій черговий хід, записав на дошці число k , то його суперник своїм ходом повинен записати одне з чисел $k+1$, $3k$ або $4k$ на свій вибір. Переможцем вважається той із гравців, який записав на дошці число n . Складіть алгоритм, який за даним числом n визначатиме, хто з гравців може забезпечити собі перемогу в цій грі. Знайдіть усі такі натуральні n , які не перевищують 2009, і для яких виграшну стратегію має Миколка.

Матеріали для проведення відбірних етапів турніру підготували:

В. О. Борисова, В. М. Брацихін, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, О. М. Назаренко, О. Н. Нестеренко, М. О. Перестюк, В. В. Плахотник, К. В. Рабець, В. М. Радченко, М. М. Рожкова, О. Ю. Теплінський, О. К. Толтиго, Р. П. Ушаков, І. В. Федак, В. А. Ясінський.

ХІІІ ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

Завдання для відбірних етапів турніру*

Вельмишановні учасники Турніру! Задачі, що пропонуються нижче, досить складні, і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У деяких ситуаціях вашій команді буде варто поставити і розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної «боротьби», оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру (нехтування ж можливостями узагальнення інколи призводить до втрати балів).

Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. **«Число підмножин»**. Знайдіть число підмножин множини $\{1, 2, \dots, n\}$ (включаючи порожню множину), які: а) не містять жодної пари послідовних чисел; б) не містять жодної трійки послідовних чисел.
2. **«Нерівність Коші-Буняковського»**. Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$; $b_1, b_2, \dots, b_n$ виконується нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2,$$

причому знак рівності буде тоді й тільки тоді, коли існують дійсні числа λ, μ , такі, що $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ і $\lambda a_k + \mu b_k = 0$, $1 \leq k \leq n$.

Доведіть нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \leq (n-2) \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + 2a_2 a_3 \right),$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, $n \geq 3$. У якому випадку має місце рівність?

3. **«Вимірювання відстані»**. Відомий наступний спосіб наближеного вимірювання відстані. Нехай, наприклад, спостерігач знаходиться на березі річки у точці C і має на меті виміряти її ширину. Для цього він фіксує точку A на протилежному березі так, щоб кут між лінією берега і прямою CA був близьким до прямого. Потім спостерігач витягує вперед праву руку з піднятим вгору великим пальцем, заплющує ліве око і суміщає піднятий палець з точкою A . Далі, відкриває ліве око, заплющує праве і оцінює відстань між точкою на протилежному березі, на яку вказує палець, і точкою A . Цю відстань множить на 10 і отримує наближене значення відстані до точки A , тобто ширини річки. Обґрунтуйте цей спосіб вимірювання відстані.
4. **«Сума k -тих степенів»**. Дослідіть, для яких натуральних показників k сума $1^k + 2^k + \dots + n^k$ ділиться на $1 + 2 + \dots + n$ для всіх натуральних n .

* Для проведення шкільних, районних, міських та обласних етапів турніру відповідні журі й оргкомітети можуть частково змінювати запропонований перелік задач.

5. **«Добутки чисел Фібоначчі».** Нехай послідовність (F_n) задається рівностями: $F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 2$. Розглянемо добуток $p_k = F_n \cdot F_{n+1} \cdot \dots \cdot F_{n+k}$.

А) Доведіть, що для $k = 2, 3, 4$ числа p_k не можуть бути точними квадратами при жодному значенні n .

Б) Дослідіть це питання для інших значень k .

В) Дослідіть, чи може бути точним квадратом число $F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_n$.

6. **«Чудові точки всередині трикутника».** Усередині трикутника ABC знайдіть точки G і H для яких відповідно середнє геометричне і середнє гармонічне відстаней до сторін трикутника набувають максимальних значень.

У яких випадках відрізок GH паралельний до однієї із сторін трикутника? Знайдіть довжину такого відрізка GH .

7. **«Подільність многочленів».** Нехай m і n — натуральні числа.

А) Нехай двочлен $x^n - 1$ ділиться на двочлен $x^m - 1$. Доведіть, що n ділиться на m .

Б) Нехай двочлен $x^n + 1$ ділиться на двочлен $x^m + 1$. Доведіть, що $\frac{n}{m}$ — непарне число.

В) Нехай двочлен $x^n - 1$ ділиться на двочлен $x^m + 1$. Доведіть, що двочлен $x^n - 1$ ділиться на двочлен $x^m - 1$.

Г) Нехай тричлен $x^{2n} + x^n + 1$ ділиться на тричлен $x^{2m} - x^m + 1$. Доведіть, що тричлен $x^{2n} + x^n + 1$ ділиться на тричлен $x^{2m} + x^m + 1$.

Узагальніть результати попередніх пунктів для інших многочленів.

8. **«Рівновіддалені точки».** На координатній площині зобразіть множину всіх тих точок $(x; y)$, для яких

$$\max(|x+1|, |y|) = \max(|x-1|, |y|).$$

9. **«Кількість розв'язків».** Знайдіть кількість розв'язків рівняння

$$\sqrt{[x]} + \sqrt{\{x\}} = a,$$

де $[x]$ — ціла частина числа x , $\{x\} = x - [x]$ — дробова частина числа x , у залежності від значення параметра $a \in \mathbf{R}$.

10. **«Розбиття».** Представлення натурального числа у вигляді суми натуральних доданків назовемо розбиттям цього числа (наприклад, $15=7+3+3+2$). Порядок доданків не враховується, тобто $3=2+1$ і $3=1+2$ — одне й те саме розбиття.

Через $P(N)$ позначимо число всіх розбиттів числа N і нехай $P_k(N)$ — число всіх тих розбиттів числа N , що задовольняють додаткову умову: довільні два доданки розрізняються не більше, ніж на k . Наприклад, розбиття $15=8+7$ та $15=4+4+3+2+2$ враховуються при підрахунку $P_2(15)$, а $15=7+5+3$ — ні. Через $Q_k(N)$ позначимо число всіх тих розбиттів, для яких довільні два доданки розрізняються не більше, ніж на k і всі доданки непарні. А) Знайдіть $P_1(2010)$. Б) Знайдіть $P_1(N)$ для довільного натурального числа N . В) Знайдіть $Q_1(2010)$. Г) Знайдіть $Q_2(2010)$. Д) Знайдіть $P_2(N)$ для довільного натурального числа N . Е) Знайдіть $P_3(N)$ для довільного натурального числа N . Є) Нехай k — фіксоване натуральне число і $P_k(N)$ розглядається як

функція N . Доведіть, що існує такий многочлен $f(x)$, що $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P_k(N)}{f(N)} = 1$ та знайдіть степінь многочлена $f(x)$.

11. «**Два факторіали**». Нехай p — просте число. Знайдіть усі натуральні n такі, що число $(p-n)!(n-1)! + (-1)^{n-1}$ ділиться на p .

12. «**Дотична до кола**». На площині зображено трикутник ABC і коло ω , яке проходить через вершину C , середини сторін AC та BC і точку перетину медіан трикутника ABC . На колі ω відзначена точка K така, що $\angle AKB = 90^\circ$. Користуючись лише лінійкою, проведіть дотичну до кола ω в точці K .

13. «**Тура на шаховій дошці**». Тура відвідує кожну клітинку шахової дошки рівно один раз і повертається на початкове поле. За один хід вона переходить на сусідню клітинку (із спільною стороною).

А). Таким чином, маршрут тури замкнений і являє собою неопуклий многокутник без самоперетинів. Знайдіть його площу (площа однієї клітинки дорівнює 1, маршрут проходить через центри клітинок).

Б). Відомо, що тура потрапила на поле b_2 з поля a_2 . З котрого поля вона потрапила на поле h_8 ?

14. «**Найкоротші шляхи**». У задачі йдеться про найкоротші шляхи між точками $A(0;0)$ та $B(n;n)$, складені із відрізків прямих $x = k$, $0 \leq k \leq n$ та $y = s$, $0 \leq s \leq n$.

Кожний такий шлях — ламана. Вона може містити від двох (таких ламаних дві) до $2n$ (таких ламаних також дві) ланок. Щоб дістатися від A до B уздовж ламаної, складеної з $2n$ ланок, слід змінювати напрям руху на кожному перехресті. Поділимо всі можливі ламані (шляхи від A до B) на класи, у залежності від того, із скількох прямолінійних відрізків вони складені.

А) Скільки є ламаних, котрі мають рівно m , $3 \leq m \leq 6$, ланок?

Нехай m — натуральне число, $1 \leq m \leq n$.

Б) Скільки є ламаних, котрі мають рівно $2m - 1$ ланок?

В) Скільки є ламаних, котрі мають рівно $2m$ ланок?

Маючи числа, котрі визначають кількісний склад усіх класів ламаних, складіть тотожність для біномних коефіцієнтів.

15. «**Центри мас трикутників**». На сторонах трикутника ABC зовнішнім чином побудовані правильні трикутники ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 . Доведіть, що точки перетину медіан трикутників ABC та $A_1B_1C_1$ співпадають.

16. «**Точки на сфері**». Точки A, B, C і D лежать на сфері радіуса 1. Відомо, що виконується така рівність:

$$AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD = \frac{512}{27}.$$

Доведіть, що $ABCD$ — правильний тетраедр.

17. «Ціна опціона “basket”». Про невід’ємні числа p_{ijk} , де $1 \leq i, j, k \leq 3$, відомо, що кожна з

подвійних сум $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{ijk}$, $\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 p_{ijk}$, $\sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 p_{ijk}$ дорівнює 1. Для заданого числа $L > 0$ знайти

найбільше і найменше значення виразу $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 p_{ijk} (i + j + k - L)_+$, де $a_+ = \max(a, 0)$, $a \in \mathbf{R}$.

18. «Математика по-гвінейськи». Маємо 7 словосполучень мовою *сеймат* (одна з 800 мов у Папуа-Новій Гвінеї) та їх переклад у довільному порядку: {tehu ing, huhua seilon, tel seilon, toluhu ing, toluok sinen, tok sinen, huok sinen}, {три собаки, один будинок, дві собаки, один собака, дві людини, одна людина, три будинки}.

А) У першому стовпчику виконані дії з числами, у другому — ті ж дії у тому ж порядку, записані словами:

$\dots \times 2 = \dots$	tepanim toluhu $\times$ huohu = ...;
$3 \times 31 = 93$	$\dots \times \dots =$ seilon hinalo huopanim toluhu;
$\dots + \dots = 17$	huopanim + tepanim huohu = tolupanim huohu;
$\dots + \dots = 23$	$\dots +$ huopanim huohu = seilon tel toluhu;
$\dots + 60 = \dots$	$\dots +$ seilon tohu = seilon tepanim;

Заповніть пропуски.

Б) За поданими матеріалами опишіть систему числівників мовою *сеймат*.

19. «Рекурентна послідовність». Послідовність дійсних чисел (a_n) задається в такий спосіб:

$a_0 = \frac{1}{2010}$ і $a_{n+1} = a_n - \arcsin(\sin^2 a_n)$ для всіх $n \geq 0$. Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} \cdot a_n)$.

20. «Детермінована гра». Грають двоє. Перший називає цифру від 2 до 9. Другий множить її на довільну цифру від 2 до 9. Потім перший множить результат на довільну цифру від 2 до 9 і т.д. Виграє той, хто вперше отримає добуток, більший за: 1) 2010; 2) задане число C . Хто виграє при правильній грі: перший гравець чи другий?

Матеріали для проведення відбірних етапів турніру підготували:

В. О. Борисова, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман,
О. М. Назаренко, О. Н. Нестеренко, М. О. Перестюк, К. В. Рабець, В. М. Радченко,
М. М. Рожкова, О. Ю. Теплінський, О. К. Толпиго, А. А. Томусяк, І. В. Федак, В. А. Ясінський.



Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

XIV ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М. Й. ЯДРЕНКА

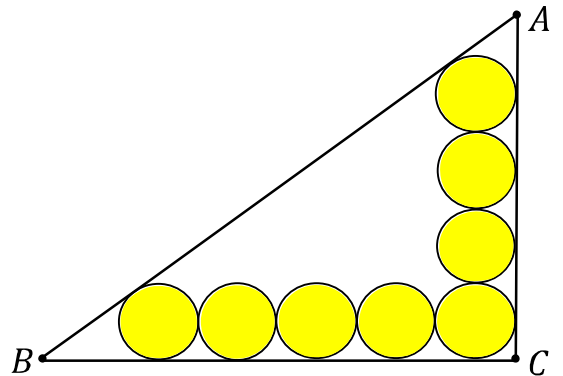
Завдання для відбірних етапів турніру*

Дорогі друзі — юні шанувальники математики! Деякі із задач, що пропонуються нижче, досить складні і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У певних ситуаціях вашій команді буде варто поставити й розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної «боротьби», оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру (нехтування ж можливостями узагальнення інколи призводить до втрати балів).

Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. **«Найменше значення».** Знайдіть усі такі трійки натуральних чисел a , b і c , для яких вираз $\frac{1024}{a} + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{2}$ набуває свого найменшого значення.

2. **«Ланцюжок кіл».** Вісім кіл радіуса r розташовані в прямокутному трикутнику ABC (кут C — прямий) так, як зображено на рисунку (кожне з кіл дотикається до відповідних сторін трикутника та інших кіл). Знайдіть радіус вписаного кола трикутника ABC .



3. **«Числові конструкції та суми кубів і квадратів».** а) Доведіть, що для будь-якого натурального $k \geq 2$ існує таке натуральне число, яке можна подати у вигляді суми $2, 3, \dots, k$ кубів натуральних чисел.
б) Доведіть, що для будь-якого натурального $n \geq 3$ існує таке натуральне число, куб якого можна подати у вигляді суми кубів n попарно різних натуральних чисел.

* Для проведення шкільних, районних, міських та обласних етапів турніру відповідні журі й оргкомітети можуть частково змінювати запропонований перелік задач.

в) Доведіть, що для будь-якого натурального n існує таке натуральне число, квадрат якого можна подати у вигляді суми $2, 3, \dots, n$ квадратів попарно різних натуральних чисел.

4. «**Біноміальні коефіцієнти та системи числення**». а) Як за розкладами натуральних чисел n і m у двійковій системі числення визначити, чи є біноміальний коефіцієнт C_n^m парним числом? б) Як за розкладами натуральних чисел n і m у двійковій системі числення визначити показник *найбільшого* степеня числа 2, на який ділиться без остачі біноміальний коефіцієнт C_n^m ?

5. «**Ковзаюче коло**». Коло ω_0 дотикається до прямої ℓ у точці A . Нехай R — задане додатне число. Розглядаються всілякі кола ω радіуса R , які дотикаються до прямої ℓ та мають з колом ω_0 дві різні спільні точки. Точку дотику кола ω з прямою ℓ позначимо через D , а точки перетину кіл ω та ω_0 — через B і C (вважаємо, що відстань від точки B до прямої ℓ більше за відстань від точки C до цієї прямої). Знайдіть геометричне місце центрів описаних кіл усіх таких трикутників ABD .

6. «**Функціональні рівняння**». Знайдіть усі такі функції $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, що для всіх дійсних x і y виконується рівність:

а) $f(f(x) + y^2) = x + y^2$;

б) $f(f(f(x)) + y) = x + y$.

7. «**Складна нерівність**». Нехай задано три набори довільних дійсних чисел:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Доведіть, що має місце нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^3 \leq \frac{1}{8} \left(\sum_{k=1}^n a_k^4 + \sum_{k=1}^n b_k^4 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^4 + \sum_{k=1}^n c_k^4 \right) \left(\sum_{k=1}^n c_k^4 + \sum_{k=1}^n a_k^4 \right).$$

8. «**Намисто симетричних нерівностей**». Для нерівних додатних дійсних чисел x і y доведіть такі нерівності:

а) $\frac{8}{(x+y)^2} \leq \frac{2}{(x-y)^2} + \frac{1}{2xy}$;

б) $\frac{18}{(x+y)^4} \leq \frac{2}{(x-y)^4} + \frac{1}{x^3 y + x y^3}$;

в) $\frac{16}{(x+y)^6} \leq \frac{4}{(x-y)^6} + \frac{1}{3x^5 y + 10x^3 y^3 + 3xy^5}$.

Для кожної з нерівностей знайдіть усі пари додатних чисел x і y , $x \neq y$, для яких досягається рівність.

9. «**Несподівані точні квадрати**». Доведіть, що існує така трійка натуральних чисел a , b і c , що кожне з чисел $a+b+c$, $ab+bc+ca$, $a^2+b^2+c^2$ та abc є точний квадрат. Дослідіть питання щодо скінченності чи нескінченності множини всіх таких трійок (вважаємо, що числа одної трійки не можуть бути отримані множенням відповідних чисел іншої трійки на одне й те саме число).

10. «**Вага многочлена**». Вагою $\mu[P(x)]$ відмінного від константи многочлена $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, записаного в стандартному вигляді — тобто у вигляді $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, де $a_n \neq 0$, — будемо називати суму квадратів усіх його коефіцієнтів: $\mu[P(x)] = a_n^2 + a_{n-1}^2 + \dots + a_1^2 + a_0^2$.

Нехай $Q(x) = 3x^2 + 7x + 2$. Знайдіть принаймні один такий многочлен $P(x)$, що $P(0) = 1$, і для будь-якого натурального числа m виконується рівність

$$\mu[(P(x))^m] = \mu[(Q(x))^m].$$

11. «**Бісектриса та висоти**». Нехай висоти BB_1 і CC_1 гострокутного трикутника ABC перетинають його бісектрису AL у двох різних точках P і Q відповідно. Позначимо через F таку точку, що $PF \parallel AB$ та $QF \parallel AC$, а через T — точку перетину дотичних, проведених у точках B і C до описаного кола трикутника ABC . Доведіть, що точки A , F і T лежать на одній прямій.

12. «**Циклічна система рівнянь**». Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{3x-y}{x-3y} = x^2, \\ \frac{3y-z}{y-3z} = y^2, \\ \frac{3z-x}{z-3x} = z^2. \end{cases}$$

13. «**Дробові частини**». Нехай $[x]$ — найбільше ціле число, яке не перевищує x , $\{x\} = x - [x]$.

а) Доведіть, що існує число $\lambda > 0$, яке задовольняє такі три умови:

$$\frac{1}{10} < \{\lambda\} < \frac{9}{10}, \quad \{\lambda^2\} < \frac{1}{10^6}, \quad \{\lambda^3\} < \frac{1}{10^6}.$$

б) Чи може таке число λ належати проміжку $(0;5)$?

14. «**Вписаний чотирикутник**». Дано вписаний у коло ω чотирикутник $ABCD$, у якому $AB = AD$, $CB = CD$. Візьмемо точку $P \in \omega$. Нехай вершини чотирикутника $Q_1Q_2Q_3Q_4$ симетричні точці P відносно прямих AB , BC , CD і DA відповідно.

а) Доведіть, що точки, симетричні точці P відносно прямих Q_1Q_2 , Q_2Q_3 , Q_3Q_4 і Q_4Q_1 , лежать на одній прямій.

б) Доведіть, що коли точка P рухається по колу ω , то всі такі прямі проходять через одну спільну точку.

15. «**Розбиття на групи**». Задано деяку послідовність натуральних чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, у якій кожне натуральне число зустрічається рівно один раз (тобто для кожного натурального числа s існує рівно одне $p \in \mathbb{N}$ таке, що $a_p = s$).

а) Чи завжди знайдеться таке m , що в множині $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ існує підмножина, сума елементів якої дорівнює $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{2}$?

б) Таке ж саме питання, якщо в заданій послідовності для всіх натуральних k виконується нерівність $a_k \leq k^2$.

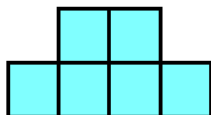
16. «**Перерізи многогранників**». Дослідіть питання щодо найбільшої кількості сторін многокутників, які можна отримати в перерізі площиною:

а) правильних многогранників;

б) опуклих октаедрів, які не є правильними (тут ми вважаємо *опуклим октаедром* будь-який опуклий многогранник з 8 трикутними гранями, 12 ребрами та 6 вершинами, з кожної з яких виходить по 4 ребра).

Чи існує такий опуклий n -гранник, що будь-який многокутник, отриманий у його перерізі площиною, має не більше за $n/10$ сторін?

17. «**Розрізання шахівниць**». Дослідіть питання щодо умов (необхідних та/або достатніх), за яких клітчасті прямокутники можна розрізати по лініях сітки на фігурки, кожна з яких є або клітчастим квадратом розміру 2×2 , або шестиклітинковим поліміно вигляду



в довільній орієнтації (з повертаннями та перегортаннями).

Матеріали для проведення відбірних етапів турніру підготували:

Н. І. Белухов, В. О. Борисова, Р. А. Заторський, О. В. Карлюченко, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, В. М. Лейфура,
І. М. Мітельман, Д. Ю. Мітін, М. О. Перестюк, О. Н. Нестеренко, В. В. Плахотник, К. В. Рабець, В. М. Радченко,
М. М. Рожкова, О. Ю. Теплінський, О. К. Толпиго, І. В. Федак, А. В. Чайковський, В. А. Ясінський.

Web-сторінка Всеукраїнського турніру юних математиків: www.ukrtym.blogspot.com.