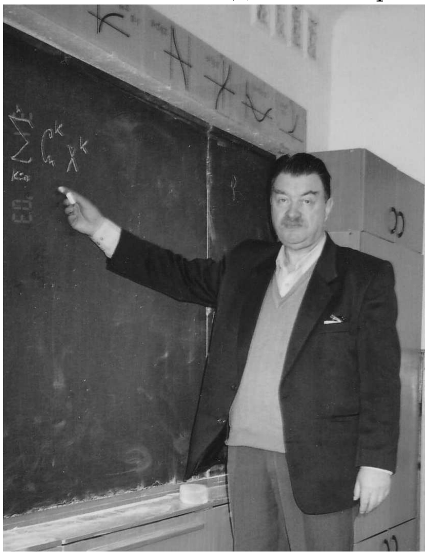
Парадокс дослідника

Р.П. Ушаков

Ми щиро вітаємо члена редакційної колегії нашого журналу, заслуженного вчителя України, двічі лауреата Соросівської премії Рудольфа Петровича Ушакова з нагоди його 75-річчя.



Майже 40 років Р.П. викладав математику в київській середній школі № 173. Він виховав кілька поколінь учнів, серед них чимало кандидатів наук. Впродовж 20 років шкільний математичний гурток, яким керував Р.П., ставав переможцем Всесоюзного конкурсу з розв'язування задач журналу "Математика в школе".

У творчому доробку Р.П. 20 чудових книжок, зокрема "Доведення нерівностей", "Повторювальний курс математики", "Колекція тригонометричних нерівностей", "Кути у стереометрії", "Опуклі функції та нерівності". Він є автором понад 60 науково-методичних статей, що друкувалися у радянських журналах "Квант" і "Математика в школе", а також в українських журналах "Математика в школі", "Математика в школах України" і нашому журналі.

Діяльність ювіляра не можна уявити без оригінальних задач, яких він склав чимало — 250. Вони регулярно друкуються в математичних журналах для школярів.

Ми зичимо Рудольфу Петровичу міцного здоров'я і творчої наснаги, а також чекаємо від нього нових книжок, статей і задач.

Із невеликими скороченнями передруковуємо статтю Р.П. Ушакова із журналу "Математика в школах України", 2003, № 31 (43), а також підбірку його задач із різних розділів математики.

У своїй чудовій книзі [1] відомий математик Д. Пойа наводить такий приклад.

Нехай треба довести теорему 1: *Сума кубів перших n натуральних чисел є квадратом деякого натурального числа.*

Природньо доводити цю теорему методом математичної індукції (ММІ).

При $n = 1$ маємо $1^3 = 1^2$, при $n = 2$ маємо $1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$. Отже, при $n = 1, 2$ теорема 1 справедлива. Нехай теорему 1 доведено для деякого натурального k, тобто $1^3+2^3+\ldots+k^3 = m^2$. Треба довести, що $1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3 = p^2$. Для цього слід встановити, що $m^2+(k+1)^3$ є квадратом деякого натурального числа p. При спробах це зробити виникають труднощі, які спонукають нас шукати інші шляхи доведення. Спостереження приводять до таких рівностей:

$$1^3 = 1^2,\ 1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2,\ 1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2,\ \ldots$$

Мабуть, справедлива теорема 2: *Сума кубів перших n натуральних чисел є квадратом натурального числа, яке дорівнює сумі цих чисел,* тобто

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

Доведемо теорему 2 за допомогою ММІ.

Для $n = 1$ теорема справедлива.

Нехай $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = (1 + 2 + \ldots + k)^2$. Тоді

$$1^3{+}2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + \ldots + k)^2 + (k+1)^3 = \left(\tfrac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 =$$

$$={(k+1)}^2\left(\tfrac{k^2}{4} + k + 1\right) = (k+1)^2 \cdot \tfrac{(k+2)^2}{4} = \left(\tfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + \ldots + (k+1))^2,$$

що завершує індуктивне доведення.

Таким чином, доведення теореми 1 за допомогою ММІ не проходить, а більш точну теорему 2 вдалося довести цим методом. Із теореми 2 випливає теорема 1. Тому теорему 2 називають сильнішою за теорему 1. Виходить, що сильнішу теорему легше довести.

Це явище Д. Пойа назвав парадоксом дослідника (*inventor's paradox*). Виявляється, що на практиці такі випадки не поодинокі. Доведемо декілька нерівностей, використовуючи "парадокс дослідника".

Приклад 1. Довести нерівність

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Доведення. Безпосередньо довести за допомогою ММІ дану нерівність не вдається. Доведемо за допомогою ММІ сильнішу нерівність

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \le 2 - \frac{1}{n}. \tag{1}$$

При $n = 1$ маємо рівність: $\frac{1}{1^2} = 2 - \frac{1}{1}$. Нехай $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{k}$. Аби довести, що

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \le 2 - \frac{1}{k+1},$$

достатньо встановити допоміжну нерівність $\frac{1}{(k+1)^2} \le \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, яка є рівносильною очевидній нерівності $\frac{1}{(k+1)^2} \le \frac{1}{k(k+1)}$. За принципом ММІ нерівність (1) доведено. □

З наведеного прикладу добре видно суть запропонованого методу. Нехай потрібно довести нерівність

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < c, \tag{$*$}$$

де c — деяка стала. Доведення за допомогою ММІ не проходить, тому варто спробувати довести за допомогою ММІ сильнішу нерівність

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le c - \varphi(n), \tag{$**$}$$

де $\varphi(n)$ — деяка додатна функція. У прикладі 1 $\varphi(n) = \frac{1}{n}$. Аналогічні міркування застосовуються і до нерівностей вигляду

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > c, \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n < c, \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n > c.$$

Наприклад, у випадку $a_1 \cdot a_2 \ldots \cdot a_n < c$ будемо доводити сильнішу нерівність

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leq c \cdot \varphi(n),$$

де $0 < \varphi(n) < 1$.

Приклад 2. (Київська олімпіада, 1982 р.) Довести, що при всіх натуральних n

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^4} + \frac{3}{3^9} + \ldots + \frac{n}{3^{n^2}} < \frac{1}{2}.$$

Доведення. Доведемо сильнішу нерівність

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^4} + \frac{3}{3^9} + \ldots + \frac{n}{3^{n^2}} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3^{n+1}}. \tag{2}$$

При $n = 1$ маємо $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2}$, або $\frac{1}{3} < \frac{7}{18}$.

Аби перейти від $n = k$ до $n = k + 1$, достатньо встановити допоміжну нерівність

$$\frac{k+1}{3^{(k+1)^2}} \leq \frac{1}{3^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+2}}. \tag{3}$$

Дана нерівність рівносильна нерівності $\frac{k+1}{3^{(k+1)^2}} \leq \frac{2}{3^{k+2}}$, або $k + 1 \leq 2 \cdot 3^{k^2+k-1}$. Останню нерівність легко довести за допомогою ММІ (зробіть це самостійно). Додаючи нерівність (2) для випадку $n = k$ та допоміжну нерівність (3), дістанемо нерівність (2) для випадку $n = k + 1$. За принципом ММІ нерівність (2) доведено. $\square$

Приклад 3. Довести нерівність

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}. \tag{4}$$

Доведення. Спробуємо застосувати ММІ.

При $n = 1$ маємо $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, нерівність виконується. Нехай

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2k} < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2k}}. \tag{5}$$

Аби отримати нерівність (4) для $n = k + 1$, слід було б перемножити нерівність (5) та допоміжну нерівність

$$\frac{2k+1}{2(k+1)} < \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}. \tag{6}$$

Проте нерівність (6) неправильна. Справді, вона рівносильна таким нерівностям:

$$\begin{aligned}(2k+1)\sqrt{k+1} < 2(k+1) \cdot \sqrt{k} &\Leftrightarrow (2k+1)^2(k+1) < 4(k+1)^2 \cdot k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2k+1)^2 < 4(k+1) \cdot k \Leftrightarrow 1 < 0.\end{aligned}$$

Отже, безпосередньо застосувати ММІ не вдається.

Доведемо за допомогою ММІ сильнішу нерівність

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \tag{7}$$

При $n = 1$ маємо рівність: $\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Аби перейти від $n = k$ до $n = k + 1$, достатньо встановити допоміжну нерівність

$$\frac{2k+1}{2(k+1)} \le \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}}. \tag{8}$$

Дана нерівність рівносильна таким нерівностям:

$$\sqrt{2k+1} \cdot \sqrt{2k+3} \le 2(k+1) \Leftrightarrow (2k+1)(2k+3) \le 4(k+1)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4k^2 + 8k + 3 \le 4k^2 + 8k + 4,$$

а отже правильна. Перемножуючи нерівність (7) для випадку $n = k$ та допоміжну нерівність (8), дістанемо нерівність (7) для випадку $n = k + 1$. За принципом ММІ нерівність (7) доведено. □

Зауваження. Права частина нерівності (20) одержується множенням правої частини нерівності (19) на $\varphi(n) = \sqrt{\frac{2n}{2n+1}}$, причому $0 < \varphi(n) < 1$.

Приклад 4. Довести нерівність

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}.$$

Доведення. Спробуємо застосувати ММІ.

При $n = 1$ маємо правильну нерівність $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{2}$.

Аби перейти від $n = k$ до $n = k + 1$, слід було б використати допоміжну нерівність $\frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}} < \frac{2k+1}{2(k+1)}$, яка суперечить нерівності (8) з прикладу 3. Отже, безпосередньо застосувати ММІ не вдається.

Доведемо за допомогою ММІ сильнішу нерівність

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} \le \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}.$$

При $n = 1$ маємо рівність: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Аби перейти від $n = k$ до $n = k + 1$, достатньо встановити допоміжну нерівність

$$\frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{2k+2}} \le \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Дана нерівність рівносильна до $\sqrt{2k} \cdot \sqrt{2k+2} \le 2k + 1 \Leftrightarrow 2k \cdot (2k+2) \le (2k+1)^2$, а отже правильна. □

Зауваження. З прикладів 3 і 4 випливає, що справедлива подвійна нерівність

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} \le \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \le \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Приклад 5. (Українська олімпіада, 1975 р.) Довести нерівність

$$\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^3}\right)>\frac{1}{2},\ n\geq 2.$$

Доведення. Доведемо за допомогою ММІ сильнішу нерівність

$$\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^3}\right)\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},\ n\geq 2.$$

Якщо $n=2$, то $1-\frac{1}{2^3}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}$, або $\frac{7}{8}>\frac{3}{4}$.
Аби перейти від $n=k$ до $n=k+1$, достатньо встановити допоміжну нерівність

$$1-\frac{1}{(k+1)^3}\geq\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2(k+1)}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}\right).$$

Дана нерівність рівносильна таким нерівностям:

$$1-\frac{1}{(k+1)^3}\geq\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{(k+1)^3}\geq 1-\frac{1}{(k+1)^2}\Leftrightarrow(k+1)^2\leq(k+1)^3.$$

□

Приклад 6. Довести нерівність

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}.$$

Доведення. Доведемо за допомогою ММІ сильнішу нерівність

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}\leq\frac{5}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}.$$

При $n=1$ маємо рівність: $1=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}$.
Аби перейти від $n=k$ до $n=k+1$, достатньо встановити допоміжну нерівність

$$\frac{1}{(k+1)^3}\leq\frac{1}{2k(k+1)}-\frac{1}{2(k+1)(k+2)}.$$

Дана нерівність рівносильна нерівності $\frac{1}{(k+1)^3}\leq\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, або $k(k+2)\leq(k+1)^2$. □

Приклад 7. Довести нерівність

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2.$$

Доведення. Доведемо сильнішу нерівність

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\leq 2-\frac{1}{n!}.$$

При $n = 1$ маємо рівність: $\frac{1}{1!} = 2 - \frac{1}{1!}$.

Аби перейти від $n = k$ до $n = k + 1$, достатньо встановити допоміжну нерівність $\frac{1}{(k+1)!} \le \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$. Дана нерівність рівносильна нерівності $\frac{2}{(k+1)!} \le \frac{1}{k!}$, або $2 \le k + 1$. $\square$

Зауваження. Послідовність $\{a_n, n \ge 1\}$ із загальним членом

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

зростає та обмежена зверху, бо згідно з прикладом 7 маємо $a_n < 3$. Отже, ця послідовність збіжна; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$, де e — відома константа, це ірраціональне число, $e \approx 2{,}718$.

Приклад 8. Довести нерівність

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$$

Доведення. Доведемо сильнішу нерівність

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} \le 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

При $n = 1$ маємо $\frac{1}{2} \le 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2} \le \frac{3}{2}$, нерівність правильна.

Аби перейти від $n = k$ до $n = k + 1$, достатньо встановити допоміжну нерівність

$$\frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}} \le \frac{2}{\sqrt{k+1}} - \frac{2}{\sqrt{k+2}}.$$

Дана нерівність рівносильна таким нерівностям:

$$1 \le 2(k+2) - 2\sqrt{(k+1)(k+2)} \Leftrightarrow 2\sqrt{k^2+3k+2} \le 2k+3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4(k^2+3k+2) \le (2k+3)^2 \Leftrightarrow 4k^2+12k+8 \le 4k^2+12k+9.$$

$\square$

Приклад 9. (Київська олімпіада, 2002 р.) Довести нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{1}{2}.$$

Доведення. Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2}{n^2+1} > \frac{1}{4}.$$

Доведемо сильнішу нерівність

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2}{n^2+1} \ge \frac{1}{4} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

При $n = 1$ маємо $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1}$. Аби перейти від $n = k$ до $n = k+1$, достатньо встановити допоміжну нерівність

$$\frac{(k+1)^2}{(k+1)^2+1} \geq \frac{k+2}{4(k+1)} : \frac{k+1}{4k}.$$

Дана нерівність рівносильна таким нерівностям:

$$\frac{(k+1)^2}{(k+1)^2+1} \geq \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(k+1)^2+1} \geq 1 - \frac{1}{(k+1)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)^2} \geq \frac{1}{(k+1)^2+1}.$$

$\square$

Уважний читач помітив, що при такому способі доведення нерівності головне — знайти таку функцію $\varphi(n)$, щоб одержану сильнішу нерівність, з якої випливає дана, вже можна було б довести за допомогою ММІ.

Певною мірою, це мистецтво того, хто розв'язує задачу, адже математика не лише наука, а й мистецтво.

Література.

1. Д. Пойа. Как решать задачу, Львов: Журн. "Квантор", 1991.

2. В.А. Вишенський, О.Г. Ганюшкін, М.В. Карташов та ін., Українські математичні олімпіади, Київ, Вища школа, 1993.

3. В.А. Вишенский, М.В. Карташов, В.И. Михайловский, М.И. Ядренко, Сборник задач Киевских математических олимпиад. К: Вища школа, 1987.

4. В.Г. Коваленко, М.Б. Гельфанд, Р.П. Ушаков, Доведення нерівностей. К: Вища школа, 1979.

5. Р.П. Ушаков. І все-таки математична індукція! Математика, 2002, № 38 (194).

6. Л. Цинман. Парадокс исследователя. Квант, 1976, № 11.