Вибрані задачі Р.П. Ушакова

1. Знайти ціле число, найближче до суми $S = \sum\limits_{k=1}^{1000} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$.

("Математика в школе" № 2, 1978)

2. Довести, що при натуральних $n \geq 2$, $p \geq 3$ виконується нерівність

$$\prod_{k=2}^{n}\Big(1 - \frac{1}{k^p}\Big) > \frac{p}{p+1}.$$

("У світі математики" № 1, 2003)

3. Довести, що для будь-яких дійсних x, y і z виконується нерівність

$$(x^2+y^2-z^2)(x^2+z^2-y^2)(y^2+z^2-x^2) \leq (x+y-z)^2(x+z-y)^2(y+z-x)^2.$$

("Квант" № 1, 1977)

4. Довести, що для будь-яких двох трикутників з кутами α, β, γ і $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ виконується нерівність

$$\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta} + \frac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma} \leq \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma.$$

("Квант" № 1, 1987)

5. У трикутнику ABC, в якому $BC < BA$, через вершину C проведено пряму, перпендикулярну до бісектриси BE. Ця пряма перетинає бісектрису BE в точці F, а медіану BD — в точці G. Довести, що відрізок EG ділиться відрізком DF навпіл. *("Математика в школе" № 1, 1985)*

6. а) *(Нерівність Ушакова на площині)* На сторонах BC, CA, AB трикутника ABC вибрані відповідно точки A_1, B_1, C_1 так, що відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці. Довести, що $S_{A_1B_1C_1} \leq \frac{S_{ABC}}{4}$.

б) *(Нерівність Ушакова у просторі)* На гранях BCD, CDA, BDA, ABC тетраедра $ABCD$ вибрані відповідно точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, що відрізки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перетинаються в одній точці. Довести, що $V_{A_1B_1C_1D_1} \leq \frac{V_{ABCD}}{27}$.

("Квант" № 5, 1983)

7. Довжини ребер трикутної піраміди позначимо через a, b, c, d, e, f, а радіус вписаної в піраміду кулі — через r. Довести, що

$$r < \frac{1}{4}\sqrt[6]{abcdef}.$$

("У світі математики" № 3, 1996)