

Задача

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ – дійсні числа такі, що для всіх $k = 1, 2, \dots, 2019$

$$a_1 a_2 \dots a_k \geq 1.$$

Довести нерівність

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_{2019}}{2019} > \frac{13}{2}.$$

Розв'язання

З умови задачі випливає, що всі $a_k > 0$. Також

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq k \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} = k$$

Доводимо більш загальне твердження: для $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ буде

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

Використовуємо перетворення Абеля:

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \\ &= a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) \\ &+ (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})(b_{n-1} - b_n) + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)b_n \\ &\geq (b_1 - b_2) + 2(b_2 - b_3) + 3(b_3 - b_4) + (n-1)(b_{n-1} - b_n) + nb_n \\ &= b_1 + b_2 + \dots + b_n. \end{aligned}$$

Далі для $b_k = \frac{1}{k}$ і $n = 2019$ оцінюємо часткову суму гармонічного ряду.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2019} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) \\ &+ \dots + \left(\frac{1}{1025} + \dots + \frac{1}{2048}\right) - \left(\frac{1}{2020} + \dots + \frac{1}{2048}\right) \\ &\geq \frac{25}{12} + 9 \cdot \frac{1}{2} - 19 \cdot \frac{1}{2020} > \frac{13}{2}. \end{aligned}$$

Зауваження. Також можна оцінювати залишок гармонічного ряду через інтегральну ознаку і натуральний логарифм.