Додаток до листа ДНУ
«Інститут модернізації змісту освіти»
від 16.06.2020 № 22.1/10-1237

XXIII ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М. Й. ЯДРЕНКА

Завдання для відбіркових етапів турніру

Дорогі друзі — юні шанувальники математики!

Пропонуємо вам для розв'язання комплект завдань турніру. Деякі із задач, що наведені нижче, досить складні і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У певних ситуаціях вашій команді буде варто поставити й розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної стратегії, оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру (нехтування ж можливостями узагальнення інколи призводить до втрати балів). Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. «Спритні модулі»

Функція f, натуральне число k та числа $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ є такими, що f лінійна на кожному із проміжків $\left(-\infty, x_1\right]$, $\left[x_1, x_2\right]$, …, $\left[x_{k-1}, x_k\right]$, $\left[x_k, +\infty\right)$. Доведіть, що f можна єдиним чином зобразити у вигляді

$$f\left(x\right) = a_1\left|x - x_1\right| + a_2\left|x - x_2\right| + \ldots + a_k\left|x - x_k\right| + a_{k+1}x + a_{k+2},\ \ x \in R$$

де a_1, …, a_{k+2} – деякі дійсні числа.

2. «Рівняння в раціональних числах»

а) Доведіть, що існує безліч пар $\left(x, y\right)$ додатних раціональних чисел, що задовольняють рівняння $x^y = \left(2y\right)^x$;

б) знайдіть усі такі пари.

3. «Від ТЮМу-23 до ТЮМу-24»

Знайдіть усі пари натуральних чисел x та y таких, що $23+x^2=24y^2$.

4. «Узагальнюємо тотожність»

Тотожністю Брамагупти називається співвідношення

$$\left(x^2+ry^2\right)\left(z^2+rt^2\right)=\left(xz-ryt\right)^2+r\left(xt+yz\right)^2=\left(xz+ryt\right)^2+r\left(xt-yz\right)^2.$$

Ця тотожність показує, що для довільного r множина чисел виду x^2+ry^2 є замкненою відносно операції множення.*

Нехай $p,r,x,y\in\mathbf{Z}$. Опишіть усі такі пари (p,r), що для фіксованих p та r множина чисел виду px^2+ry^2 є замкненою відносно операції множення.

**Числова множина A називається замкненою відносно операції множення, якщо добуток двох довільних елементів цієї множини також належить A.*

5. «Ланцюжок коренів»

Для всіх натуральних n доведіть нерівність

$$\sqrt{1^3+\sqrt{2^3+\ldots+\sqrt{n^3}}}<3.$$

6. «Нерівність із числами Фібоначчі»

Числа Фібоначчі визначаються рівностями: $F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$, $n\ge 1$. Доведіть, що

$$F_{2021}>\sqrt{\frac{F_{2019}F_{2020}+1}{2020}}+2019\cdot\sqrt[2020]{F_1F_2\ldots F_{2019}}.$$

7. «Нерівність зі степенями»

Для дійсних чисел $a<b$ доведіть нерівність

$$\left(2^b-2^a\right)\left(3^b-3^a\right)<\frac{b-a}{2}\left(6^b-6^a\right).$$

8. «Розрізання трапеції»

Розріжте рівнобічну трапецію на три подібні між собою трапеції всіма можливими способами. Для рівнобічної трапеції з основами a та b і бічною стороною $c=1$ з’ясуйте необхідні та достатні умови реалізації кожного способу розрізання.

9. «Розрізання паралелограма»

На площині задано паралелограм. Використовуючи лише односторонню лінійку, хочемо провести n прямих на площині так, щоб уздовж утворених ліній паралелограм можна було розрізати на 5 *рівновеликих* многокутників. При цьому деякі многокутники дозволяється “зібрати” з кількох частин. Чи вдасться це зробити для заданого паралелограма, якщо: а) $n=12$; б) $n=11$; в) $n=10$?

10. «Циклічна четвірка точок»

У трикутнику ABC точка I — інцентр, точка I_a — центр зовнівписаного кола, що дотикається сторони BC. З вершини A всередині кута BAC провели промені AX та AY. Промінь AX перетинає прямі BI, CI, BI_a, CI_a в точках X_1, …, X_4 відповідно, а промінь AY перетинає ці ж прямі в точках $Y_1,\ldots,$ Y_4 відповідно. Виявилося, що точки X_1, X_2, Y_1, Y_2 лежать на одному колі. Доведіть рівність

$$\frac{X_1X_2}{X_3X_4}=\frac{Y_1Y_2}{Y_3Y_4}.$$

11. «Два кола»

У гострокутному трикутнику ABC провели *чевіану* AP та відмітили центр O описаного кола. Описане коло трикутника ABP вдруге перетинає пряму AC в точці X, описане коло трикутника ACP вдруге перетинає пряму AB в точці Y. Доведіть, що прямі XY та PO перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли P – основа бісектриси трикутника ABC.

12. «Три квадрати»

На стороні CD квадрата $ABCD$ обрано точку F та побудовано квадрати $DGFE$ та $AKEH$ (точки E і H лежать всередині квадрата). Нехай M – це середина DF, J – інцентр трикутника CFH. Доведіть, що:

а) точки D, K, H, J, F лежать на одному колі;

б) кола, вписані в трикутники CFH та GMF, мають однакові радіуси.

13. «Нова циклічна четвірка»

У трикутнику ABC на стороні BC обрано точки D і E так, що кут BAD дорівнює куту EAC. Нехай I та J – центри вписаних кіл трикутників ABD і AEC відповідно, F– точка перетину BI та EJ, G– точка перетину DI та CJ. Доведіть, що точки I, J, F, G лежать на одному колі, центр якого належить прямій I_bI_c, де I_b, I_c– центри зовнівписаних кіл трикутника ABC, які дотикаються відповідно сторін AC і AB.

14. «Ощадливі перестановки»

Чудний чоботар Чеслав зшив 30 різних пар взуття, перемішав усі 60 чоботів між собою та розставив випадковим чином у ряд. Його педантична подруга Павлина переставляє взуття: за один раз Павлина може взяти будь-які два чоботи та обміняти їх місцями. За яку мінімальну кількість таких обмінів Павлина зможе гарантовано досягти розташування, в якому кожна пара чоботів розташована поруч, причому ліворуч стоїть лівий чобіт пари, а праворуч — правий?

15. «Сума дробів»

Раціональне число r=0,1415926…, складене із першої тисячі знаків десяткового розкладу числа $\pi-3$. Почнемо виписувати число $s=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+...$ за таким правилом: на кожному кроці для натурального n до суми додається дріб $\frac{1}{n}$, найбільший із можливих, але так, щоб сума не виявилася більшою за число r. Таким чином, враховуючи, що $\frac{1}{7}=0{,}142...>r$, пишемо $s=\frac{1}{8}+...$; далі, оскільки $\frac{1}{8}+\frac{1}{60}=0{,}14166...>r$, пишемо $s=\frac{1}{8}+\frac{1}{61}+...$ тощо. Доведіть, що цей процес обірветься, тобто на деякому кроці виявиться, що записано точнісінько число r.

16. «Сума цифр кратного»

а) Відомо, щонатуральне число N менше за 10^6. Шукаємо таке натуральне M що воно ділиться на N, а *сума цифр* числа M не перевищує числа k Для якого найменшого k можна стверджувати, що таке число M в усіх випадках існує?

б) Та сама задача, але відомо, що $N > 999999$.

17. «З'єднуємо точки»

На площині розміщено мільйон точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Дев'ять гравців по черзі сполучають ці точки відрізками, кожний олівцем свого кольору. За один хід дозволяється сполучити довільні дві точки, які ще не були з'єднані. Виграє той, хто першим отримає трикутник з вершинами в заданих точках, *усі сторони якого мають однаковий колір*. Чи може така гра закінчитися внічию?

18. «Дописуємо трійки»

Марійка та Миколка грають у таку гру. Спочатку Миколка називає деяке *просте* число p. Після цього Марійка записує на дошці натуральне число n Тоді Миколка дописує до цього числа справа одну чи декілька цифр 3. Він виграє, якщо отримане таким чином число ділиться на p В іншому разі – перемагає Марійка. Хто з них виграє, якщо обоє прагнуть перемогти?

19. «Чудовий квадрат»

У клітинки квадрата 5×5 Петрик і Ганнуся по черзі (першим ходить Петрик) вписують цифри від 1 до 9. Квадрат називається *чудовим*, якщо після заповнення всіх клітинок суми усіх дев'яти чисел у кожному меншому квадраті 3×3:

а) належать діапазону [37; 53];

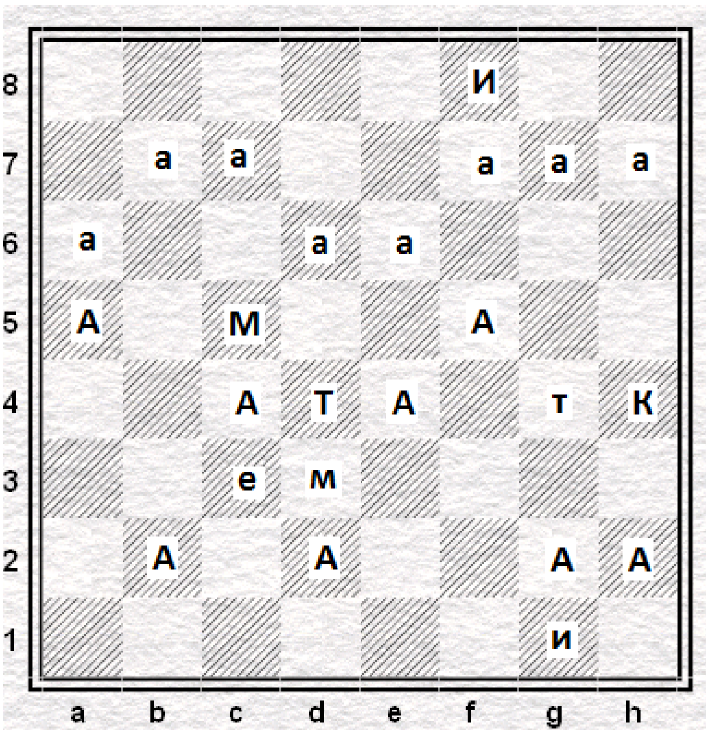
б) належать діапазону [38; 52].

Петрик любить чудеса і хоче зробити квадрат *чудовим*. Чи вдасться Ганнусі йому завадити?

20. «Блукання по дільниках»

Двоє гравців та суддя грають у таку гру. Суддя випадковим чином вибирає один із натуральних дільників деякого фіксованого числа n та називає його, а далі гравці по черзі *множать* останній названий дільник на 2, або *множать* його на 5, або ж *ділять* його на 10 – так, щоб отриманий результат був знову натуральним дільником числа n, який ніхто ще не назвав. Гравець, який не може зробити хід, програє. Яка ймовірність того, що за правильної гри обох гравців виграє перший гравець, якщо: а) $n=10^6$, б) $n=10^{2k}$, $k\in N$.

21. «Ребус МАТЕМАТИКА»



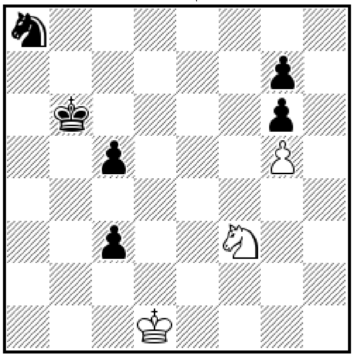
Кожна літера відповідає певному типу фігури: 6 літер – 6 *різних* типів фігур. Великі літери – фігури одного кольору, малі – фігури іншого кольору. Визначте позицію та останній хід.

22. «Серійний кооперативний мат»

У шаховій композиції є такий жанр: серійний кооперативний мат за n ходів Ser.h#n.Чорні здійснюють n ходів підряд (не роблячи на жодному з них шаху білому королю!), після чого у білих з'являється можливість оголосити чорному королю мат за 1 хід. Але є особливий різновид задач цього жанру: окрім розв'язку самої задачі, необхідно ще знайти кількість розв'язків. Множинність розв'язків у цьому жанрі виникає виключно за рахунок перестановок ходів; кожна фігура рухається строго за своєю траєкторією від початкового положення до кінцевого. Такі шахово-математичні задачі позначатимемо Ser.h#n-N?

Дано початкову позицію ***P*** задачі типу *Ser.h#n-N?*

Позиція *P*



Ser.h#20-N?

а) Знайдіть кількість розв'язків N цієї задачі, в якій кількість ходів $n = 20$.

б) Шляхом *простих* перетворень* позиції ***P*** отримайте легальні позиції $\boldsymbol{P_1}$ та $\boldsymbol{P_2}$ задач на серійний кооперативний мат *Ser.h#*n_1-N_1*?* та *Ser.h#*n_2-N_2*?*– таких, що $N_1 - N_2 = N$. При утворенні кожної із цих двох позицій допускається щонайбільше 3 *прості* перетворення. Достатньо знайти хоча б одну пару таких позицій.

*До *простих* перетвореньу цій задачі ми відносимо видалення, добавляння фігури або заміну фігури на фігуру будь-якого кольору.

***

Матеріали для проведення відбіркових етапів турніру підготували:
Е. Г. Ейлазян, О. В. Зеленський, Е. Зуппа (Італія), А. І. Казмерчук, Д. Коуклі (Канада), О. Г. Кукуш, М. П. Мороз, Д. П. Мисак, О. Б. Панасенко, В. М. Радченко, О. К. Толпиго, Е. Й. Туркевич, Р. П. Ушаков, І. В. Федак, А. М. Фролкін, Д. І. Хілько (Франція), А. С. Юрчишин.